高等学校教学用書



球面天文学

M. K. 文采尔著

高等教育出版社

高等学校教学用書



球面天文学

M. K. 文采尔著
朱裕栋　張先覺譯

高等教育出版社

本書系根据苏联测繪出版社（Геодезиздат）1952年出版的文采尔（M. K. Вентцель）教授著“球面天文学”（Сферическая Астрономия）出的。原書經苏联高等教育部审定作为天文大地專業和工程测量專業的教科書。

本書的主要內容是：苏联实用天文学的發展历史，天球坐标系及其彼此間的关系，时間的测量及各种时的换算，岁差、章动和恒星自行的产生及其对赤道坐标的影响，以及星表的編算；此外，对地極移动也作了較詳細的論述；通过本書的学習可以为学習实用天文学打好良好的基础。

本書由朱裕栋、張先覺兩同志翻譯。楼成器、朱新美兩同志参考俄文原書作文字校訂，張睿文同志作業务校訂。

球 面 天 文 学

M. K. 文采尔著

朱裕栋　張先覺譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·459 開本850×1168 1/32 印張12 13/16 插頁1 字数312,000 印数0001—1,500
1958年7月第1版 1958年7月北京第1次印刷 定價￥(8)1.50

序　言

这本球面天文学教程是供大地、航測、制圖工程学院測量系天文大地專業的学生使用的。这就决定了本書的內容和叙述的特点，而其中有些問題的叙述还有这样的目的，就是使这些相应的章节对測量系各專業教研室的研究生也有所帮助。

作者在編写本書时，是根据在 1949 年召开的关于教学大綱的教学法会議上审查过的教学大綱編写的，这个教学大綱符合于一切最新的規定和要求，并在 1950 年經苏联高等教育部批准。在編写时，一部分取自作者过去所著的“野外天文学”第一卷，但作了很仔細的修改；大部分是重新編写的。

玆指出本書与“野外天文学”第一卷的某些不同的地方如下。

本書在叙述关于时間的測量問題时，利用了 1949 年作者在莫斯科大地、航測、制圖工程学院（莫斯科測繪工程学院）科学会議上所作的报告：“論球面天文学教程中时間的測量問題”。

本書在叙述当中尽可能地添入一些历史因素，并指出俄国和苏联的学者与科学机关在整个天文学的發展中、尤其是在实用天文学的發展中所起的作用。

本書还作了一些补充，这些补充中，有些是測繪工程学院天文教研室的同志們在討論“野外天文学”和本書的編写大綱时給作者提出的，有些是另一些專業人員所提出的（§ 38, 62 等等），也有些是書評家 A. B. 馬扎耶夫教授（第八章）和 A. И. 維特曼講师（在各章节內作了个别的增补）所提出的。

本書注意到了并反映出了“苏联天文年历”中的某些变更，卽：

（一）时差符号的变更（自 1941 年起）；

(二) 运用补助值"时差加 12 小时"来代替时差(自 1942 年起);

(三) 各种天文計算用表的結構、內容和配置方面的变更;

(四) 添置的几种新表。

同样也顧及到了"天文計算用表"," 1967 顆星的星表"等等新版本的出現,和" 2957 顆星的星表"的問世。

所有的例題都經过了改算,对于重新写过的各节的例題,是新拟定的。这些例題都是用 "1953 年的苏联天文年历"以及新的用表与星表等等算出的。

由于測繪工程学院測量系工程測量專業所講授的球面天文学教程大綱在問題的論述上与天文大地專業的大綱相差很小,故作者在編写本書的时候,尽可能使本書同样适用于工程測量專業的学生,并且在叙述全部資料时力求易于分辨出某些章节仅为某一專業所必需。于此,便可具体地指出:对于工程測量專業的学生来說,在学習本書时,按作者个人的意見,可略去第 8、23、28、35、38、51、55、57、59、65、66、67、69、70 各节。在另外有几节中亦可作大量的刪減,至于如何刪減,那末本課程的講授者是很容易指出的。其他系和其他高等学校如果球面天文学教程的講授时数較少,也可采取同样的方法来使用本教科書。

最后,我謹向莫斯科測繪工程学院天文教研室諸同志、К. А. 茨維特科夫教授、П. С. 薩卡托夫教授、М. Н. 謝凡洛夫講师、А. Н. 庫茲涅佐夫講师、Л. В. 麦夏斯基講师、В. З. 哈尔虎諾夫、Н. А. 貝罗娃、書評家 А. В. 馬扎耶夫教授、編輯 А. И. 維特曼講师、美术家 Е. С. 馬特繪耶夫、以及在編写过程中給予帮助的所有同志致以衷心的感謝。

М. К. 文采尔教授

目 录

第一章　緒論

§1. 天文学的对象·天文学的分类

天文学是一門科学，它所研究的对象是：天体及其在天穹上的視位置和在空間的眞位置；天体的視运动和眞运动以及产生这些运动的原因；天体的形狀和物理結構以及它們的物理-化学性質；天体上所發生的現象；宇宙的結構及其整体和部分的演化。

因此，天文学就是一門自然科学。

天文学被公認为人类知識最古老的一个部門。由于其研究的对象很广泛，由于長期来积累了各种丰富的資料，因此这門科学便逐漸地分成为若干个部門，它們都几乎各自成为一門独立的学科。現仅举出其中几个如下。

一、球面天文学　它主要是用球面坐标法来研究天体的方向，以及我們所观测到的天体方向之变化。

二、理論天文学　它主要是从运动学观点出發来研究太陽系中的行星、彗星和其他天体对太陽的运动。它提供出由天体位置的改变来决定天体軌道的方法，并由此产生了解决反算的問題。此外，它还叙述确定双星軌道的方法。

三、天体力学　它是在运用万有引力定律的基础上以解析力学的方法（主要是用动力学）来研究天体的运动和狀态。

四、天体物理学　它的任务是研究天体一切有关物理-化学方面的現象，其中也包括演化問題。天体物理学可以說是近代天文学中范圍最广的一个部門。它又分为天体攝影学、天体光譜学、天体光度学以及理論天体物理学。通常还把所謂恒星統計学和实用天体物理学也列入其内。

五、宇宙起源論 它所研究的是宇宙的演化及其各个部分(如恒星、恒星系、太陽系等)的形成，此外它还有一个目的就是要科学地預料出宇宙各个部分的今后發展。

六、实用天文学 又称天体測量学；它是研究測量天体的方法、測量用的仪器以及为了获得最后成果而进行的測量計算方法的一門天文科学。

实用天文学分为天文台的(或基本的)和野外的(或勘察的)兩类。第一类是叙述天文台上所用的固定的大型天文仪器的理論，以及用这种仪器来測定恒星坐标和天文基本常数的方法；第二类是叙述在野外用輕便仪器观測来測定地面上各点的地理坐标和方位角的方法。基本实用天文学通常狭义地称为天体測量学；而野外实用天文学則簡称为实用天文学。

§2. 天文学与其他科学的关系·天文学在解决高等測量学和制圖学的主要問題方面的作用和意义·天文学在測量工作中的地位

天文学既然是一門自然科学，因而它必然与許多其他自然科学有着密切的关系。一方面，天文学利用其他科学的成就来研究宇宙及其各个天体，比如天文学与数学、力学、物理学、化学等的关系就是如此；另一方面，天文学在某种程度上又是其他科学的基础学科或是一門輔助学科。因为天文学还研究屬于天体的地球，所以它与許多研究地球的科学也有着密切的关系，例如与地球物理学、地質学、地理学、制圖学和大地測量学，尤其是与高等測量学有着更紧密的关系。

野外实用天文学与大地測量学和制圖学的关系最密切。在測量工作中，天文点和天文方位角起着重要的作用。地面点的地理坐标(即經度和緯度)是借天文观測測定的称为天文点。天文点依其

测定的精度及其將来的用途而分成各种等級。

一等点和二等点总是因一等和二等三角测量的进行而测定的，并应用于天文大地網的最后平差中，其作用是帮助天文大地網的正确定向，同时結合大地测量資料来确定垂綫偏差和研究大地球体的形狀。

在以确定地球形狀和大小为目的的弧度测量中所作的一等天文观测，以及为了获得大地起算数据和参考椭球体在地球体內的定向，而在三角鎖的起始点上所作的一等天文观测，都具有極其重大的意义。

其次，天文测定在天文大地水准测量和天文重力水准测量中亦起着重大的作用。

三等点和四等点，即所謂勘察点，通常是在小比例尺测圖时，特別是在沒有全国性三角鎖的無人或人烟稀少的地区內测圖时，作为控制点用的。

在所有等級的天文点上，除了测定緯度和經度以外，通常还要测定某一远处实物方向的方位角。这一测定可以定出子午綫的方向，从而可促进三角鎖（拉伯拉斯方位角）、控制網或圖面（测板）的正确定向，并可应用于往后的平差中。方位角的测定不仅在测定各等級的天文点时要进行，而且在一切测圖中都要进行，例如路綫测圖、平板仪测圖、經緯仪测圖、攝影經緯仪测圖、导綫测量、航空测量等等。方位角观测可以作为角度观测的檢查，还可以更好地平差和标定各种测量網以及圖面。

为了测定緯度和經度，必須知道准确的时間，除了某些特殊情况以外，为了测定方位角也必須知道准确的时間。因此，在一切天文观测中，通常都要进行测时工作。

野外实用天文学是一門学科，它所叙述的是实用天文学关于一、二、三、四等点的天文观测的那部分；这些天文观测，大部分是

用天文万能仪、恒星时計和平时計来进行的；这里也包括着用一分或半分光学經緯仪[①]和怀表进行的近似天文測定。

在有系統地研究这些方法之前，我們应以足够的篇幅来叙述一下球面天文学的原理，以便理解与掌握实用天文学，因为实用天文学內將会用到在球面天文学中定义的一些量、概念和术語，此外它还依据在球面天文学中导出的一些必需的基本公式，和一些方法。

§3. 天文学是从实际需要所产生的一門科学·球面天文学与实用天文学的發展簡史

对各种天体的观測在有史以前已經开始，首先是对太陽和月亮，然后才观測明亮的行星、星座和恒星。考古学上的种种發現肯定地証明了这一点。例如在欧洲中部發現約在五万年前人类所居住过的窖洞內，就有大熊座圖的痕迹。

原始人对天空作这种極其簡單的观測，并非出于單純的好奇心或求知欲，而是出于他們辨方向和定时間的迫切需要。

几万年內，人們一直是依靠观測夜間的恒星、星座与日間的太陽，来远涉海洋，縱橫大陆。并且由星星和太陽帮助。从事打獵或以后的牧畜業的原始部落找到穿过森林和草原的道路。当航海業發展到人們敢于在辽闊的海洋上航行时（譬如古腓尼基人，古希臘人或古諾尔曼人），这些天体又帮助人們在沒有航标的条件下掌握住远离海岸的正确航向。

关于这一点，罗馬詩人奥維奇在他“蛻变”的第三册中講得很生动。他叙述了一个漁夫的兒子阿克特在他父亲死后如何又成了一个漁夫。但后来他又想当一个航海家，当个舵手。阿克特在与

① 近代也將光學經緯仪应用于三、四等天文点的測定。

費夫王潘菲談話时，用下面几句話講述了这件事：

为了不長留在峭壁上，
我学着怎样把舵兒掌，
不多久，右手能令船尾变方向，
在天上，学会辨認
雨神 鹿形羊，
昂宿二，天牛头，
　大小北斗，
探明了風兒住处
和那泊船的好港口。

由此可見，研究星空和星座是訓練舵手所必不可少的一个环节。阿克特說到御夫座中的五車二（五車二按其拉丁文原意为山羊）时，称其为鹿形羊座。大熊座和小熊座在那时称为北斗。七姐妹和天牛头是金牛座中的兩群微小而显明的星群。昂宿二便是七姐妹之一。

在荷馬所写的“奥德賽”詩篇中，詳細地談到了在古代航海的时候，怎样的利用星星。荷馬称为女神的女神的卡里普莎，長期拘留奥德賽做俘虜，不讓他回到在伊泰克島的家中去。“奥德賽”詩篇中的第五首，就是描写奥德賽离开卡里普莎女神島的。荷馬这样写道：

奥德賽扯起帆兒順着風，
心下乐融融，
手把舵柄目注蒼穹，
長宵未嘗閉双瞳。
一会兒凝眸看金牛，
一会兒注視晚落的牧翁，
更望着那大熊繞天軸，尾指燦爛的美獵翁。
天上唯此星永不墜溟濛。
原来他把卡里普莎的囑咐牢牢記在心：
須使大熊常在左，海道方通。

和第一种实际需要一样，促成天文这門科学逐漸产生的第二

种实际需要，是迫切地要求测量时間。最初，这种测量是以直接观测晝夜的交替为基础的，因此时間的基本單位"日"也很自然地从自然界本身假借过来了。自古以来，就依据太陽进行测量白天的时間，即根据極其近似地用目力估計太陽对地平的高度变化来测时的。在夜間，則是以观测星座的周日运动的方法来测时的。

上述观测連同对大自然中气象和植物特性的季节变化之观测，又逐漸地导致时間的第二种自然單位"年"的建立。实际上，根据一年內子夜星空的变化和在日出之前或日沒之后对星座与星星的观察，便可很快地發現太陽的視周年运动，并确定一年的長度。一年長度的确定是逐漸趋于精确的。这样，观测太陽和星星就使历的推算或时間的計算，也就是長时間段的量度趋于完善。

随着原始社会的生产力和一般技术文化的發展，对这种测时的实际需要更加迫切了。特別是由狩獵和畜牧業向农業过渡的时候，这种需要更加明显，因为及时地組織各种田間工作（播种，收割等等）对农業来說是非常重要的。古埃及就是在这方面的一个很好的历史实例。尼罗河極有規律地在每年一定的季节發生泛濫，对埃及的农業曾起了巨大的作用。及时地并准确地預測洪水的到来，曾經是当时埃及天文学家（他們同时又是祭司）的主要任务之一。他們根据長期的天文观测确定，尼罗河的泛濫是緊接着天狼星第一次在朝霞中出現之后而开始的。由于这种类似的观测，因而可以極精确地确定一年的長短（$365\frac{1}{4}$日），这样就促进了古埃及天文知識的發展。

叙述一般天文学的历史不是我們的任务，那怕是最簡略的叙述，也不是我們的任务。这里我們主要是談一談球面天文学和实用天文学的發展情况，然而，由于篇幅所限，以及对球面天文学和实用天文学的历史研究不够，因此对这一問題只能提供一些最簡單的資料。

古代天文学，在埃及的尼罗河流域，在巴比倫美索不达米亞的底格里斯河和幼發拉底河流域，印度的恒河流域，中国的黄河流域，尤其是在希臘获得很大的發展。起初的天文知識具有單憑經驗的、片断的和專供实用的性質；观測沒有測量仪器，天体的位置是用肉眼来估計的。以后随着生产力、技术能力和技术文化的不断發展，开始采用最簡單的且極不精确的仪器（土圭、日晷、沙鐘、漏壶、視差尺、星盤、渾天仪），并且建造一些專門的建筑物（方尖塔、金字塔等等）。这些建筑物不仅是法老王（古代埃及国王的称号）的陵墓，而且在某种程度上也是天文台。德里的古印度天文台也是很著名的。

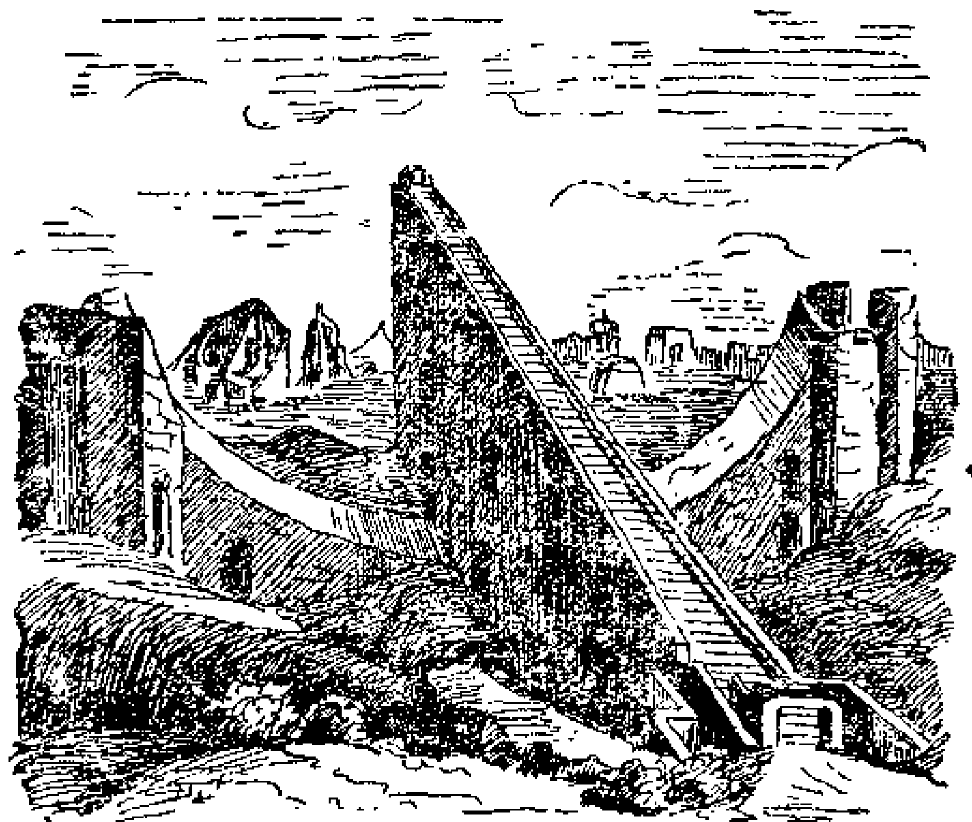
在希臘，天文学开始获得了充分的科学性質。希臘人早就运用了球面坐标：地理的、天球的、赤道的、特别是黄道的。他們会測量太陽的地平緯度，恒星的赤緯以及黄緯和黄經，而且还会近似地測定一点的地理緯度。他們編制了第一批星表；發現了蒙气差、岁差和月球的視差。他們也是首先試圖測定日、月、地的大小及其彼此間距离的人。当然，他們的測量是不精确的，他們的各种天文常数測定也始終是不成功的，但是他們是科学的天文学的奠基人的这一功績則是無可爭辯的。

在中世紀，中亞細亞的学者从事于天文研究工作。他們为后輩保留了古代埃及、印度和希臘在天文学上的种种成就，并且还改良了一些古代的仪器；他們也建筑了天文台（如撒馬尔汗的烏魯別克天文台），并对恒星及其他天体进行了观測。

在哥白尼和克普勒时代，球面天文学已發展到与近代的非常接近了。进一步的成就是：發現了光行差和章动，并在理論上对它們作了研究；測定了太陽和恒星的視差；研究了岁差和蒙气差的理論。

实用天文学的發展是与天文仪器的改进密切相联的，因而也

是与生产力的發展和一般的技术进步相关联的。当时已經采用了以量測天頂距为基础的一切天文測定法；然而，所得成果的精度很少达到 1′ 的。这是因为当时在仪器中尙未采用望远鏡。仅在十七世紀的后半世紀和十八世紀，天文仪器制造的实踐中才采用了望远鏡，并在某些其他方面也得到了改进。随着天文仪器的不断改进，天文观測的精度也就不断地提高，天文測定法也就日益精确，而天体測量学、特别是野外实用天文学也得到了發展。



德里的古印度天文台

§4. 普尔柯沃天文台及其在天文科学發展上的作用·祖国的实用天文学学派及其在苏維埃时代的成就

現在簡單地談一談我国野外实用天文学的历史。

俄国人很早就对天文学發生了兴趣。俄国編年史便可証实这

一点。在編年史中記載着各种显著的天文現象(例如日月蝕，太陽上出現大量的黑子，大彗星，流星墜落等等)。然而，現在还沒有关于基輔俄国和莫斯科俄国时代測定地理坐标或与測量有关的类似观測的資料。因此，俄国野外实用天文学的历史还只能从十七世紀末算起。

我国野外实用天文学的这段历史可以分作几个时期；时期的划分是以我国基本社会經济形态——封建农奴形态、資本主义形态和社会主义形态的更替来确定的。这样，我們就有兩个主要时期：十月革命以前的和十月革命以后的。

十月革命以前的时期又可分成兩个阶段。

第一阶段是从十七世紀末到十九世紀初。在这一阶段的初期，俄国剛开始学習实用天文学，而到这一阶段的末期，俄国的天文学家——無論是学者和实际工作者——已經完全赶上了国外的天文科学。在这一百多年的过程中，Я. В. 蒲里斯、彼得一世、Л. Ф. 瑪格尼茨基、А. Д. 克拉西尔尼科夫、М. В. 罗蒙諾索夫、С. Я. 魯莫夫斯基、В. К. 維什涅夫斯基和其他許多学者都从事于实用天文学的研究。在这一阶段內，曾借天文观測測定了我国三百多个城市的經度和緯度。如果注意到当时所采用的仪器(象限仪、色差望远鏡)是極其粗略和笨重的，所始出的成果是很不精确的，其次天文測定的方法也是很不完善的，需要有長时期的一連串的观測——那就必須承認上述成就是極其重大的；要知道当时还沒有一个国家能够測定这么多的天文点。

因而，在我国天文学史的第一阶段的末期，俄国的实用天文学家在將野外天文学实际用于祖国的地理研究方面已經超过了外国。

十月革命前我国实用天文学史的第二阶段的开始，大体上是与野外实用天文学以及高等測量学方面杰出的俄国天文学家和測



华西里·雅科夫列維奇·斯特魯維

量学家 B. Я. 斯特魯維与 K. И. 丹尼尔的实际活动的开始是同时的。1816 年，这些学者就开始測量自北冰洋海岸延伸至黑海的多瑙河口長达 25°20′的俄国大子午弧長。这件巨大的工作在 1852 年取得了卓越的成就而結束。俄国大子午弧按其長度超过其他各国所进行的弧度測量，在該弧的全長上以極高的精度測定了十三个天文点。B. Я. 斯特魯維曾精心地研究了这些天文測定的方法；其中有些方法，譬如根据天体的地平經度測时的方法，就是他首創的。

从野外实用天文学历史的第一阶段初期起，人們就認識到了地圖对發展我国的生产力与經济的意义。因此，远在 1739 年，就在科学院成立了一个專門的地理局，来領导俄国的全部測圖工作。1740—1741 年在 Л. 艾莱尔的領导下，特别是 1757—1765 年在 M. B. 罗蒙諾索夫的領导下，地理局的活动获得了極其重大的成就。

地圖在作战和国防上的作用和意义同样也是很明显的。因此，在 1763 年，总参謀部确定了專职的編制軍官，来从事边区的測圖工作。1797 年，又建立了地圖館，它是一个儲存各种地圖資料的国家档案館，該館不久便与科学院的地理局合并了。1812 年，第一次衛国战爭时期，地圖館并入陆軍部而成立了軍事測繪处。1822 年，在軍事測繪处下面又成立了軍事測量队，它的任务是供应陆軍部所需的測圖及制圖資料。軍事測量队的軍官們多半是在

俄国的边区从事地形测圖、三角测量和野外天文测量工作，以及地形圖的編制与出版工作等等。

1839年，在整个天文学的历史上，特別是在俄国的天文学历史上發生了一件重大的事件，即在普尔柯沃建立了一个总天文台。自1813年起就在吉尔柏大学担任天文学教授的 B. Я. 斯特魯維被任命为該台的台長。在当时，他已享有很高的声望。在此以前不久他已被选为科学院院士。

普尔柯沃天文台在成立后的头五十年內的活动，一直以兩个著名的文件作为指南，即由科学院專門委員会所制定的天文台章程和該台第一任台長 B. Я. 斯特魯維所拟定的天文台工作計划。

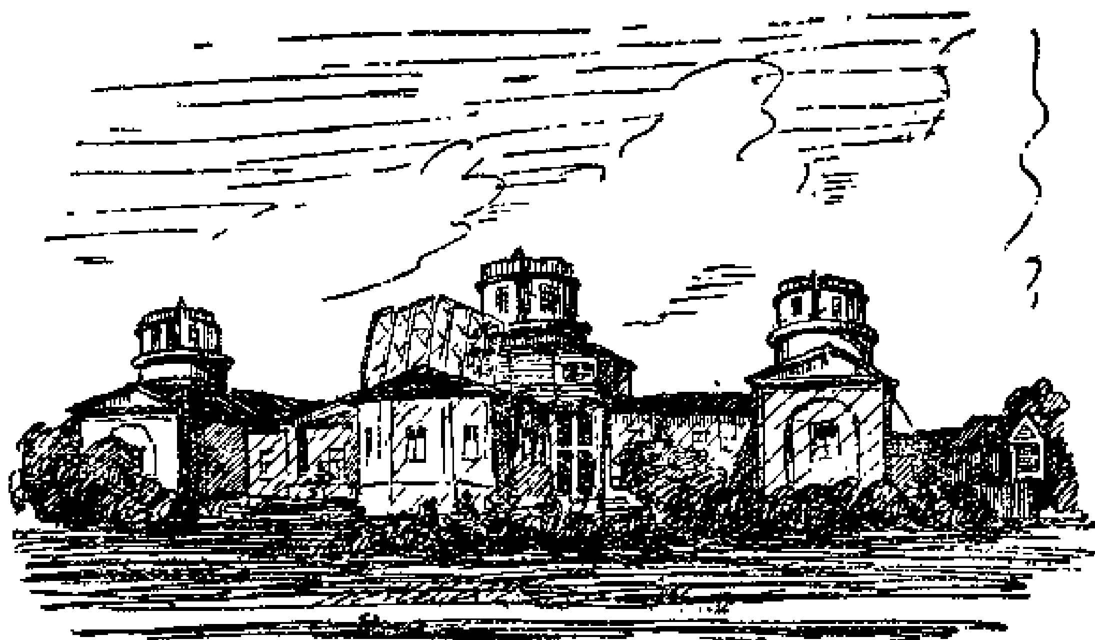
章程內写道："建立总天文台的目的是：1)进行以發展天文学为目的的經常性的最完善的观测；2)进行为帝国地理事業和科学性考察所必需的相应观测；3)此外，总天文台应当用一切方法改进实用天文学，使它适应于地理学和航海学，同时还要提供实际测定地理坐标的可能性"。

普尔柯沃天文台的第一个工作計划更詳尽地發揮了章程中的这些原則，它按以下各款規划了天文测定工作：

1）用固定裝置的大型仪器进行連續的天文观测，以便最精确地测定恒星的赤經和赤緯，編制星表，以及研究和测定各种基本的天文常数——蒙气差、岁差、章动、光行差、恒星視差和自行等等；此外，尙要观测太陽、月球、行星的位置，观测日月蝕，以及进行其他的基本天文工作。

2）用小型的輕便仪器作野外天文观测，以便测定地理勘察中天文点的經緯度；利用直接由天文台的力量或以对其他部門工作实施科学領导的形式来作的弧度测量，进行目的在于研究地球形狀和大小的天文大地工作。十九世紀九十年代，天体物理学也被列入普尔柯沃天文台的工作計划之內。

恒星天文学和基本天体測量学方面的工作，在普尔柯沃天文台的業务中占着最重要的地位。这一工作是編制星数众多、而精确度高的最好赤經和赤緯表。这一工作获得了極其重大的成就，因而天文台很快就在世界上起了領导的作用。因为在最后几章(66节等等)內还要談到这一問題，故在这里便不作进一步的叙述了。但必須指出，普尔柯沃天文台的这一工作是对有关宇宙的眞实的知識宝庫的一个偉大貢献，是对整个的天文学、特别是对野外实用天文学的巨大功績；野外实用天文学主要是通过基本星表和天文年历来广泛地应用这一工作成果的。



普尔柯沃总天文台(从南面看)①

普尔柯沃天文台依据其工作計划的第二部分和章程中（二）、（三）兩項的規定所进行的那些工作，对野外实用天文学有着最大的直接意义。例如，天文台以它自己的力量进行了具有天文大地測量和勘察性質的工作。天文台領导了斯特魯維和丹尼尔所开始的子午綫弧度測量的工作，并直接地参加了弧度測量中的天文大

① 圖为 1941 年被德国法西斯所摧毁的旧建筑物。

地測量。該台完成了1843年和1844年的兩次大規模的以天文鐘进行的勘察工作：普尔柯沃—阿尔頓，阿尔頓—格林尼治。它还在斯匹次卑尔根参加了俄国—瑞典的弧度測量(1899年至1901年)；派遣了許多天文測量員參加其他机关(例如俄国地理协会)所組織的勘察工作；并对許多这样的勘察工作进行了科学上的指导。

在改进实用天文学使之适用于地理学和航海学方面，普尔柯沃天文台的功績也是很大的。不仅是普尔柯沃工作者本身在这方面做了許多工作，而且几乎是毫不例外地所有在發展和改进野外測定的方法方面起过某种作用的天文測量員，都是經过它的培养的。

野外实用天文測量和大地測量的实际作業員的培养与訓練工作，还在普尔柯沃天文台建成之前，已从1822年在吉尔柏开始了，即在軍事測量队成立之后不久就已开始了。当时，总参謀部和軍事測量队派遣的軍官們的天文大地測量学習，是由吉尔柏大学天文教研室的主任B.Я.斯特魯維所領导的。普尔柯沃天文台成立以后，培养天文大地測量干部的任务就轉由該台担任。从1855年在总參謀部軍事学院內开設了一个大地測量特别班的时候起，該班畢業的軍官在普尔柯沃天文台的訓練期限增加为兩年。1856年，軍事部門在普尔柯沃建立了一个小型的实習天文台。

起初是斷斷續續地面自1898年起便开始正規地派遣海軍学院畢業的海道測量軍官到普尔柯沃来学習。其他許多非軍事机关(如各个大学、康士坦丁諾夫測地專修学校等等)也派遣了年青的天文測量員来普尔柯沃学習和深造。还有从国外来的学者，他們为了詳細地了解这里的工作情况，特别是关于基本天体測量学方面的情况，在普尔柯沃总要住得很久。

康士坦丁諾夫測地專修学校建立于1779年。該校在起初叫做康士坦丁諾夫測地学校。它是为了在1765年开始的全面的地

界測量而培养測地技术人員，才建立起来的專門学校。1819年，該校改名为測地專科学校，于1835年又改为康士坦丁諾夫測地專修学校。測地專修学校在开始是一个只有五个班的不公开的中等專業学校；以后逐漸經过一系列的改革，到十九世紀末，它已成为公开的四年制高等專業学校了。

康士坦丁諾夫測地專修学校是測量界的一顆种子，有了它以后，使苏联的民用实用天文学和大地測量学在二十世紀中开始成長和發展起来。但是該校于十九世紀中叶，即由中等專業学校改为高等專業学校的时候起，就已經参加了我国天文学家們的整个科学和实踐工作，而开始在我們祖国的实用天文学的历史上起着作用。

这一阶段中最主要的和最本質的現象，是我国独特的野外实用天文学学派的形成、發展及其有成效的活动；这一学派是由于普尔柯沃天文台、軍事測量队和民用天文学的机構，包括康士坦丁諾夫測地專修学校、莫斯科大学、彼得堡大学、以及其他大学和它們的天文台的友好合作而形成起来的。

B. Я. 斯特魯維是这一学派的奠基者和創始人。他的以身作則及其領导方法对該学派，特别是在創立的头几十年間具有重大的意义。那时候的許多傳統直到現在还保持着自己的意义。

这一学派的其他成員，有的是B. Я. 斯特魯維在吉尔柏大学(現为塔尔圖大学)的学生，如B. K. 乔林；有的是他在普尔柯沃天文台的学生，如Б. Я. 施維哲尔，施維哲尔后来成莫斯科大学的天文学敎授，以及測地專修学校的天文学主講和天文观測員；有的是他的学生的学生，如H. Я. 金格尔，金格尔繼斯特魯維和乔林之后很長时期被公認为这一学派的領导者。

当时該学派的大部分成員是軍事測量队的軍官，而其中主要的又是畢業于总参謀部軍事学院大地測量班并在普尔柯沃天文台

經过兩年实習的軍事大地測量員。其中还有一些人，如 П. М. 史梅洛夫和 Н. Я. 金格尔，同时又是普尔柯沃天文台的天文研究生。

我国野外实用天文学学派的第一个特征，是它的良好的工作作風。它总是在一定的仪器条件下力求达到最大可能的精度和消除系統誤差的来源；它極其重視观測的周密組織、仔細的观測和精心的整理，并正确地估价这种工作方法对于为了求得最良好的結果的意义。由 В. Я. 斯特魯維所提出的布置观測要成对称的原則起了重要的作用，这一原則为 В. Я. 斯特魯維和他的学生們始終不渝地奉行着。由于采用了这一原則，因而正好可以完全消除各种不同的系統誤差的影响。

我国野外实用天文学学派的另一个特征是理論密切联系实际。这一点首先表現在慎重地对待实踐中的要求，这就使得科学的創造性的思維工作走上应有的方向，并研究出来滿足这些要求的新方法。

我国野外实用天文学学派在發展和研究測量时間、測定緯度和其他天文測定的新方法中，以及在进一步改进这些方法方面，都起了很大的作用。在上面所談的这一阶段內共研究出：用子午仪置于卯酉圈測定緯度的 В. Я. 斯特魯維法；按恒星的地平經度測时的 В. Я. 斯特魯維法；用子午仪置于北極星垂直圈測时的 В. К. 乔林法；用子午仪置于子午圈上观測一对南北星来測时的 Д. Д. 盖捷奥諾夫法；等高星对測时的 Н. Я. 金格尔法；等高星对測定緯度的 М. В. 別夫曹夫法；置万能仪于子午圈上測时的 Н. В. 巴甫洛夫法。此外还研究出若干其他的天文測定方法。

从理論上和实踐上深入地研究等高法和一般的精确的天文測定方法，也是我国野外实用天文学学派的一个特点。在这一方面，我們所走的完全是独立的道路，且远远超过了国外的天文学，因为在这一时期，外国天文学仅仅研究出了一种測定緯度的方法，


尼古拉·雅科夫列維奇·金格尔

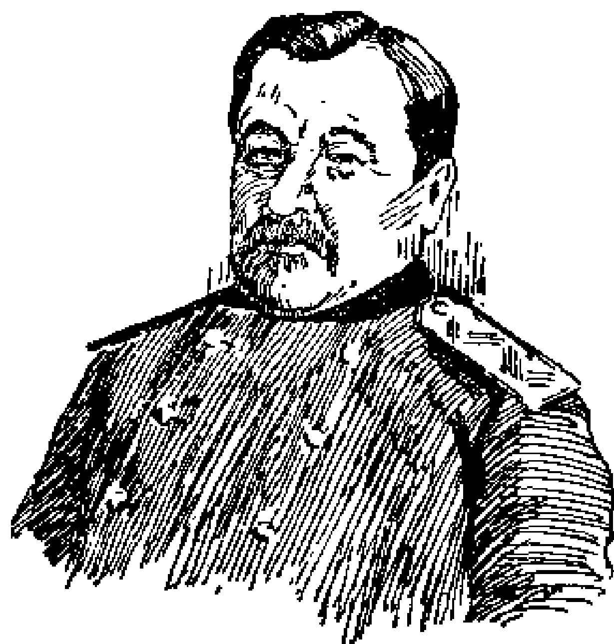
即所謂泰尔各特法。

其次，理論与实踐的联系还表現在每次徹底地研究出某一种方法之后，就將它直接用于实踐之中。每当一个新的更完善的和更精确的方法出現之后，所有的人（其中也包括学派中的一些代表人物）就立刻將其应用到实踐中去；每个人都尽自己的力量努力促使这一方法的进一步改进，并尽可能地完全消除实踐中所發現的缺点。須知实踐是眞理的最好的标准！

在野外天文学方面的广泛的实际活动，是我国野外实用天文学学派的总的特点。这一阶段內，我国学派在这方面取得了很大的成績。測定的天文点在精度和速度与前一阶段相較，提高了許多倍；这是由于使用了更精确更完备的仪器的結果。那些粗略而笨拙的象限仪已根本不用了；代替它們的，起初是比較精确而方便的复式度盤仪，以后是折光仪器，即六分仪及棱鏡度盤仪。但是在这一阶段的中期，連这些仪器也不使用了，此时已开始出現了輕便的仪器，就这些仪器的構造和精度而言已趋近于近代的仪器。輕便子午仪，天文經緯仪和万能仪以及后来的垂直大圈仪与天頂仪，乃是第二阶段的主要仪器；这些仪器中，大部分是从国外买来的或定制的，但也有一部分是俄国自制的。

天文測定的精度与速度的提高，主要是由于采用了我国学派研究出来的新穎的、較精确的、在当时是較簡便的方法的結果。在这一时期內所測定的天文点的总数是很大的，約有一百五十个以

上基本天文点和一等天文点，將近五千个的天文勘察点。



米哈依尔·华西里耶維奇·别夫曹夫

我們祖国的天文学，不仅在天文点測定的数量上，而且在測定的精度上都超过了外国天文学，这是一致公認的事。

自1917年起，我們祖国的野外实用天文学的一个新的历史时期——苏維埃时期开始了。这一时期的第一件大事，同时也是具有重大历史意义的事件，就是1919年3月15日由列宁签署的人民委員会的命令。列宁在該命令中，以天才的精确性和明确性規定了苏联大地測量学、制圖学、以及与它們紧密相关的野外实用天文学的目的和任务。根据这一历史性的文献設立了高等測量局，它的任务是进行基本大地測量、測圖及制圖工作，并对其他机关实施与此类似的工作进行监督。高等測量局是第一个大的民用測量組織，它把全国的測量研究工作和制圖業务統一起来了。該測量局在以后作了几次的改組和更名，并以不断增長的速度来發展和扩大自己的工作，因而在工作中不断获得巨大的成就。現在該測量局已改为苏联部長会議測繪总局，它以一个独立的部門在繼續进行对于社会主义建設异常重要的工作。測繪总局的三角測量，天文測量，航空攝影測量，制圖以及其它的工作都已有了巨大的規模。

1928年，在測繪总局的下面設立了一个国立測量制圖研究所，該所于1932年改称为中央測繪科学研究所。自从該所成立

起，卓越的天文大地測量学家、斯大林奬金获得者、曾任高等測量局科学技术委員会常任主席的苏联科学院通訊院士Ф. Н. 克拉索夫斯基一直是該所的領导人。所内設有天文部和时政部。該所在实用天文学方面的科学研究主題是改进野外天文測定的方法；改良輕便的(野外用的)天文仪器；研究各种系統誤差和影响，以便消除或减弱这些誤差和影响。該所在天文大地測量方面的科学研究工作的成果，是对苏联天文大地測量事業的宝貴貢献。

还在1920年，于彼得格勒成立了国家計算研究所，几年后，該所改称为天文研究所，1941年改归苏联科学院領导，而于1945年又改組为苏联科学院理論天文学研究所。該所的一个巨大功績是出版祖国的"天文年历"，自1922年起，該年历已按年發行。自天文研究所归并科学院以后，該年历改名为"苏联天文年历"；它的内容是非常丰富的。現在，"苏联天文年历"不仅赶上了外国的年历，而且在很多方面都超过了外国的年历。特别重要的是，"苏联天文年历"是最适用于苏联天文工作的需要的。

在苏維埃时期的初期，政权剛一开始时成立的国立史天堡天文研究所，对苏联的整个天文学的發展和对野外实用天文学的發展，都給予了很大的帮助。

十月革命以前建立的天文測量机关和組織仍繼續进行在实用天文学方面的工作，但都經过了改革和扩大，以适应新的社会条件，适应社会主义建設的利益和生活的新需要。康士坦丁諾夫測地專修学校已改称为莫斯科測繪工程学院，它是一个多科性的五年制的高等測量学校，普尔柯沃天文台則仍以卓越的成就繼續进行自己在基本天文測量学和天体物理学方面的基本工作。該台隨时都准备着来滿足野外实用天文学和天文大地作業所提出来的要求，并給予測繪局、天文研究所、中央測繪科学研究所在野外实际作業和科学研究工作方面以充分的協助。軍事測量人員的培养工

作，虽有过某些間断，但仍是在普尔柯沃进行的。以后于 1928 年，在測地專修学校內設立了軍事測量特別班。当軍事工程学院迁至莫斯科以后，該特別班就改編为軍事工程学院的測量系了。

至于軍事測量队，則仍然保持原来的名称。过了若干年以后才改組为紅軍总參謀部軍事測繪局。

軍事測量組織和民用測量組織的活动，是有密切联系的，它們的工作是遵照着共同拟定的細則来进行的。軍事測繪局主要是在边区和对国防具有特殊意义的地区进行大地、天文、地形和其他的測圖工作。

除了上面列举的以外，还有不少的天文机構，給予我国天文学的發展以良好的影响，譬如許多大学的天文台就是这样。

所有这些天文測量和天文大地測量机構，不論它們是旧有的，或是后来新建的，都不仅是积極地有計划地参加了苏联各省各区的各种等級的天文点的野外測定工作，而且参加了天文測定法的研究和改进工作。

由于有計划的工作，主要是天文大地測量机構的有計划的工作，在苏維埃时期曾測定了数千个天文点。根据測量局的任务，一共測定了十五个高精度的基本經度点；这些点在头几十年內是由普尔柯沃天文台測的，而在以后則是由中央測繪科学研究所天文組測的。民用的和部分軍事的測量作業机構測定了数百个一、二等天文点，这些天文点是与同等級的三角測量有連系的；它們还和另外的机構一起測定了許多的三、四等勘察点，这些勘察点是在难以通达的地区进行，它們是以获得粗略地圖为目的而作为小比例尺測圖时的控制点用的。

由于苏联的天文科学研究机構和天文学者們的有計划的积極的工作，使許多旧的天文測定方法获得成功的进一步的整理和改进；同时还研究出了一些新的天文測定方法。金格尔星对等高測

时法，在現时已經是非常完善了。此法已具有一切必需的补助用表,例如为了准备观测用的“五百对星的作業星表……”(中央測繪科学研究所出版)，和为了进行計算用的“金格尔星对表”(天文研究所和中央測繪科学研究所逐年刊行)。推导出了一些簡便的計算公式(Л.К.古里柯夫)。研究出了一些所謂“超人差”的观測方法,这些方法能够减少人的系統誤差，即所謂观測者的“人差”,并使其处于較为固定的狀态。这些方法包括有用接触测微器的金格尔星对观測法(Н.Н.道尔果夫,А.П.柯魯巴也夫等等)，有用帶有瞬間开閉器的目鏡金格尔星对观測法(А.Н.庫兹涅佐夫)，有用下面照明法的金格尔星对观測法(В.З.哈尔洪諾夫),等等。

对于別夫佐夫法来說，它有利用观測的“平均时刻”的計算方法和方便的計算公式(А.Я.奥尔洛夫，В.В.卡夫拉依斯基，В.Г.沙波什尼柯夫); 此外,这一緯度測定法的星表也經过了改編和改版(由莫斯科測繪工程学院天文教研室和中央測繪科学研究所做的)。

对于按兩星在子午圈內的天頂距之差测定緯度的所謂泰尔各特法，也編制和出版了为簡化观測的准备工作和計算用的补助用表(“泰尔各特法綱要”表I及表II;“泰尔各特法綱要的1967顆星的星表”——天文研究所的兩个版本; А.В.杰奥洛果夫的緯度由65°到78°的“星对作業星表……”)。

在苏維埃时期,曾研究出了下列一些新方法：由Л.Б.梅申斯基研究出来的用帶有接触測微器的万能仪置于子午圈上測时的方法;由В.В.卡夫拉依斯基研究出来的观測兩个或数个等高星对同时測定时間与緯度的方法;由А.В.馬扎耶夫研究出来的用万能仪观測一組(4至12顆)等高星同时測定时間与緯度的方法;由斯大林獎金获得者Ф.Н.克拉索夫斯基研究出来的观測兩星(北極星和补助星)来測定方位角的近似方法。

在测量仪器制造方面，近三十余年来有了巨大的进展。建立了許多大規模的国家光学机械企業，代替了以前为数很少的小型制造厂；成立了許多光学科学研究机構和实驗工厂。因此，我們就可以完全不向外国購置仪器了。

在这方面，我們还要提到苏維埃时期的兩个最大的成就。这就是 Д. Д. 馬克苏多夫發明了一种光学性能極好的凸凹透鏡的天文鏡；普尔柯沃的天文学家 Н. Н. 巴甫洛夫研究出了天体經过的光电記录法，这可以大大地提高观測的精度，而更主要的是可以消除观測者的人差。这兩位学者都是斯大林獎金获得者。他們倆在一起共同地設計出了一种具有新的光学裝置的輕便子午仪，以供新的光电观測法之用。

苏維埃时期的实用天文学和我国野外实用天文学学派的成就是巨大的。我国这一学派的所有特点，在苏維埃时期也保持了下来。我国学派在科学工作者和实际工作者的亲密合作下繼續成長和發展。理論与实踐的紧密联系，以及对經济与生活的实际需要的重視也更加加强了。如果說在封建社会中对地圖已感到有某些需要，如果說在資本主义社会中为了發展經济和爭夺市場需要地圖，那么为了建成社会主义，为了保衛社会主义祖国，为了極广泛地發展国家的生产力以服务于劳动群众，为了有組織地和有計划地發展社会主义經济，就更需要地圖了。在着手研究各个地区的生产潛力和經济資源之前，首先应該进行这些地区的測量制圖工作，最低限度也得同时进行。而制圖和測量又是需要有野外实用天文測量的帮助。

然而，我国实用天文学的巨大發展，不單純是由于上述这类需要所促成的。对于航海、航空和重力測量等等工作来說，需要知道精确的时間，而测时正是实用天文学的任务之一。我国学派胜利地担負起了解决所有这些实际問題的任务。

在这簡短的历史概述中，我們想說明的是，在我国野外实用天文学發展的十月革命前的第一阶段，俄国的天文学家，科学工作者和实际工作者，就完全赶上了外国的天文学家；而在十月革命前的第二阶段，他們的科学研究成果与科学实踐成果，無論在質量上或数量上都已超过了外国。現在，苏联的野外实用天文学学派，在研究各种天文測定方法方面，以及这些方法在天文大地作業中实际运用方面，都起着主导作用。在这一領域內，我国的天文学家，不仅在已測定的天文点总数上，而特别重要的是在天文点的精度和質量上都超过了外国。

§5. 太陽系和宇宙結構的近代观点之簡述

我們的地球所在的宇宙部分称为太陽系，因为太陽是这一系的中央主体。太陽是一个巨大的、熾热的、發光的气体球，其表面的溫度約为 6000°，愈近中心則溫度增加就愈快，在中心可能达到几百万度。

太陽的直徑等于 1400000 公里；也就是說，比地球的直徑約大 110 倍。太陽的体积比地球的体积大 1300000 倍太陽的質量比地球的質量大 330000 倍，比全部行星的質量总和大 700 余倍。

圍繞太陽迴轉的有九个大行星，一千个以上的小行星，几百个彗星和無穷多个小天体，即所謂流星。太陽、圍繞太陽迴轉的行星及其衛星、彗星等等天体，綜合起来構成一个太陽系。茲按离太陽由近而远的次序列举九大行星、水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星和冥王星。行星是繞着自轉軸旋轉的，行星中的大多数行星有一个或几个衛星。据此，地球也是行星之一；它环繞太陽一周要 $365\frac{1}{4}$ 日；地球也是繞自轉軸自西向东旋轉的，每旋轉一整周要一晝夜或二十四小时。地球圍繞太陽的运行也是自西向东的。地球与太陽的距离是很大的，平均为 149500000 公里；

我們用此数作为在太陽系范圍內測量距离的單位。光的傳播速度大約等于 300000 公里/秒，它从太陽来至地球所需的时間大約为 8.5 分鐘。

下表所列的是太陽系中主要天体的距离，公轉周期和自轉周期以及其他一些特殊数据。表中公轉周期以日或年为單位，自轉周期以小时、分或日为單位，其他各欄內則一律以地球的数値为單位。

行　　星	距日距离	公轉周期	自轉周期	直徑	質　量	密度	衛星数	符号
水星…………	0.4	88 日	88日	0.39	0.04	1.1	--	☿
金星…………	0.7	255 日	?	0.97	0.81	0.9	—	♀
地球…………	1.0	1 年	23时56分	1.0	1.00	1.0	1	♁
火星…………	1.5	$1\frac{7}{8}$ 年	24时37分	0.53	0.11	0.7	2	♂
小行星………	2.8	--	—	—	—	--	--	—
木星…………	5.2	$11\frac{6}{7}$ 年	9时50分	11.0	316.9	0.24	11	♃
土星…………	9.5	$29\frac{6}{13}$ 年	10时14分	9.0	95	0.13	9	♄
天王星………	19.2	84 年	10时 8分	4.0	15	0.28	5	♅
海王星………	30.1	165 年	15时	3.9	17	0.29	2	♆
冥王星………	39.5	248 年	-	0.8(?)	0.9(?)	—	--	♇
太陽…………	—	--	25日	109	332 000	0.26	—	☉

月亮是地球的衛星。它繞地球迴轉一周要 $27\,^{1}/_{3}$ 日（一个恒星月），自轉一周也需同样長的时間。月亮与地球之間的距离等于 384000 公里，或为地球半徑的六十倍；而月亮的質量則为地球質量的八十分之一。行星、衛星以及包括在太陽系內（太陽除外）的其他天体，都是不發光的黑暗球体，它們所放射的光是由太陽光反射而成的。

克普勒（1609—1619 年）發現了行星繞太陽运动的定律。这些定律可簡述如下：

克普勒第一定律　一切行星的軌道均为一橢圓，太陽位于橢

圓的一个焦点上。

克普勒第二定律 行星向徑所画的扇形面积与所需时間成正比。

克普勒第三定律 行星公轉周期的平方与其軌道長半徑的立方成比例。

第一定律确定，行星在空間运行的軌道是一条扁平的曲綫，也就是一个椭圓。第二定律指出，行星沿軌道的运动是不均匀的；当行星位于太陽附近时，或者說在近日点的时候，运行最快；反之，离太陽愈远，运行就愈慢（圖1）；当其离太陽最远时，即在远日点的时候，运行最慢。第三定律指出，行星沿軌道运动时，离太陽远的比离太陽近的行星緩慢。

牛頓（1687年）分析了克普勒定律之后，确定一切行星的运动是受太陽的引力所支配的，幷發現了万有引力定律：任一質量为 m_1 的質点与相距 r 的另一个質量为 m_2 的質点互相以力 F 吸引着，这引力与此二質点質量的乘积成正比，而和它們之間距离的平方成反比。即：

$$F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$$

式中 k 为比例系数。牛頓証明了克普勒定律是万有引力定律的結果。然而由牛頓定律可以得出結論，影响行星运动的不仅是太陽的引力，幷且还有行星間的相互引力，所以克普勒定律是一阶近似的定律。但是因为太陽的質量比行星的質量要大得多，甚至比所有行星質量的总和还要大，在很多情况下这种近似已是足够的了。每一行星对其余行星运动的影响是比較小

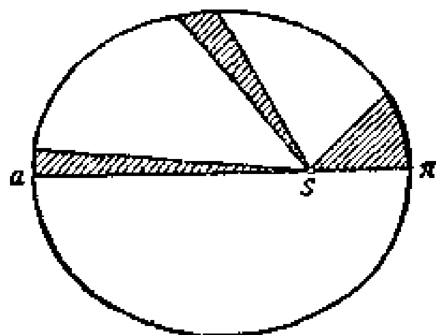


圖 1

的，它仅仅是輕微地改变其余行星的基本运动（或克普勒运动），此即所謂擾动。这种擾动在必要的情况下須特別注意。

太陽是離我們最近的恒星，其他恒星則距我們很远。光甚至从距太陽系最近的半人馬座 α 星来到我們这兒也約需 $4\frac{1}{3}$ 年；大部分的恒星距离我們几十、几百甚至几千光年。光在一年內所通过的路程称为一光年，它大約等于 9460000000000 公里。根据質量、密度、体积、溫度、光譜、年龄等等来看，太陽大致上是一个中等恒星。有許多恒星，它們的溫度極高，質量極多，体积極大，而密度極小；但也有一些恒星在相反方面或多或少地与太陽有着很大的差別。

所有用肉眼能看到的恒星和許多用近代天文鏡能看到的恒星一起組成所謂銀河系，它的形狀类似于扁豆形的旋轉橢圓体，其結構类似于所謂螺旋形星云。銀河系的大小：長徑約为 100000 光年，短徑略少于 10000 光年。我們的太陽是隶屬于銀河系的恒星之一，它距銀河系的中心約 30000 光年。

有三分之一以上的恒星是双星。很多恒星有微微發光的衛星，而有时甚至与太陽系的行星一样还有不發光的衛星。

銀河系內尙包含有亮的和黑暗的星云，它們是巨大的極其稀薄的气体团或是隕石塵埃集团。

除了我們的銀河系以外，目前已知道的尙有数百万个其他类似的恒星系，其中大部分恒星系在用大型天文望远鏡观察时或在攝影片上所見到的形狀呈所謂旋渦狀星云。这样的恒星系叫做**銀河外星云**。在天空的某些部分，常遇有所謂**河外星云**的巨大集群。这些河外星云之間的距离是很大的，差不多要比它們的本身大几十倍。例如，我們到最近的河外星云之一——著名的仙女座旋渦狀星云的距离，大約等于 750000 光年；光綫从目前已知的最远的河外星云来至我們这兒需几亿光年。

随着仪器和观測方法的改进，我們关于宇宙方面的知識就大大地扩大和完备起来，这样，我們也就日益深悉空間的無穷蘊藏了。

因此，宇宙是無限地延伸着的，它在空間是無止境的。

就时間而言，宇宙也是無穷尽的；它过去存在，將来也永远存在。它是物質的永恒循环，是物質連續变化的無穷过程。宇宙中所有的一切都在不断地运动着、变化着和發展着。恒星是由巨大的云狀物質所形成的，而这些云狀物質是由隕石塵埃和稀薄气体所構成的；这种隕石塵埃和稀薄气体在銀河系和其他河外星云中是很多的。有充分根据可以断言：恒星的形成过程現在也是在不断地进行着。很多恒星，也許是大部分的恒星，都有規律地組成了类似太陽系的行星系。每一顆恒星都要經过一系列的不断的演化和变化；它們的体积、密度、温度和質量常在变化着，其中有一部分質量又重新化成气体、隕石塵埃，电子和量子等等。这个过程，这个無穷循环的許多詳情我們現在还不明了。其中某些規律性可以認为是确定了的，这是俄国和苏联的学者們П. Н. 列別杰夫，П. Н. 勃列奇辛，О. Ю. 什米特，В. Г. 菲謝科夫以及許多其他的天体物理学家和宇宙学家們的巨大成就。

§6. 星空·最主要的星座·天体的視周日运动与視周年运动

上述全部事实，都是天文科学工作者在許多世紀以来不断地进行長期的和非常周密而精确的观測和測量所获得的。在建立天文知識系統的过程中，观測天体是必不可少的一环。每一个研究这門科学的人，在他的工作計划中，必須包括天文观測这一項，那怕在初期是最簡單的也好。在这些最簡單的观測中，首先应当是对星空直接观測，并要比較詳細地熟識它。

黃昏或夜晚的星空，在一个缺乏經驗的观测者看来，好像是一个微扁的、深藍色的或青藍色的半球形穹窿，其上散布着無数的不同亮度的光点，这就是我們所謂的星星。肉眼所見的星，按亮度的不同可分为六等，則六个星等。最亮的星叫做一等星，其余的按亮度分別为二等星、三等星……六等星。六等星是光最弱星；这种星只是在最有利的条件下用肉眼才能看到。二等星的亮度平均較一等星弱二倍半，較三等星亮二倍半；所有兩相鄰的星等之間都有这一种关系。这种星等的划分，对用天文鏡观测到的星来說亦同，它們自七等起約至二十等和二十等以上。

为了辨識以肉眼所能見到的繁星，自古就將它們区划为若干个任意的集团，并称之为星座；星座是古代根据其与人、物体、动物或幻想生物的形态極微小的相似点而取名的。每一个实际天文工作者都必須熟識这些星座中的主要星座。星座历来多用拉丁文命名的。每一星座中的每顆星用希臘字母表示，有时也用拉丁字母和数字表示，譬如：小熊座 α 星，武仙座 110 号星等。

此外，某些最亮的或最明显的星，还有它們特有的名称，譬如：大角（牧夫座 α 星）、織女一（天琴座 α 星）、天狼（大犬座 α 星）、开陽（大熊座 ζ 星），北極星或勾陈一（小熊座 α 星）。

研究北天的星座，应从大家所熟知的大熊星座开始；它的七顆主星構成一个杓形（圖 2）。北極星和小熊座在空中也不难找到。如果在意像中將大熊座的 α、β 兩星連結起来，并將其延長到五、六倍，那么我們就遇顆相当亮的二等星，就是小熊座 α 星；它是这一星座中最亮的一顆星。小熊座的七顆星也構成一个杓形，不过它的杓把弯向恰好和大熊座的杓把相反（圖 3）。作一些类似的設想結構，引一些联結大熊座的直綫，这样我們便可借此找到仙后座（圖 4），具有大角的牧夫座（圖 5），具有五車二的御夫座（圖 6），具有北河二和北河三的双子座（圖 7），以及具有軒轅十四的獅子座

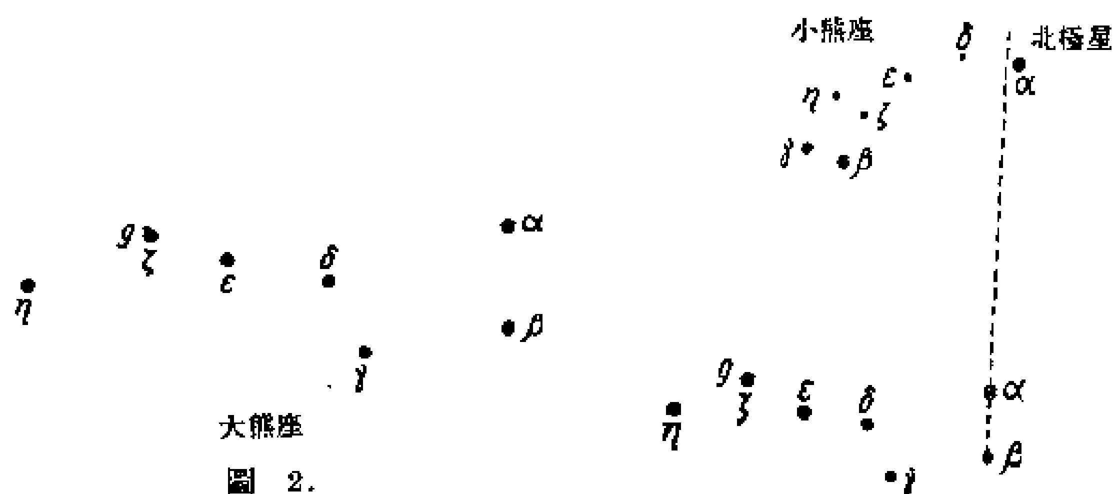


圖 2.

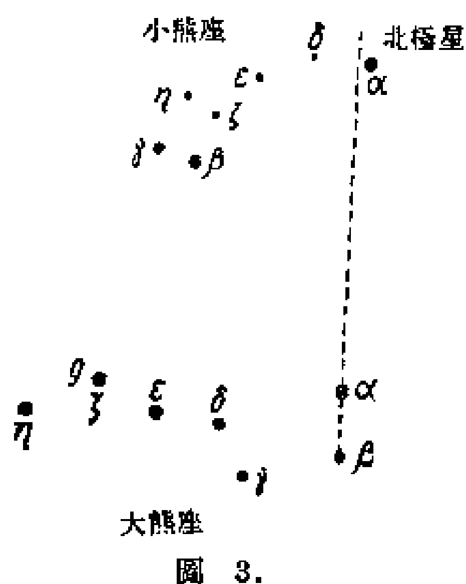


圖 3.

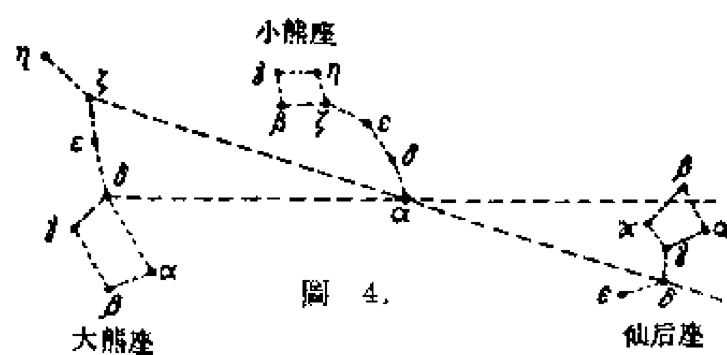


圖 4.

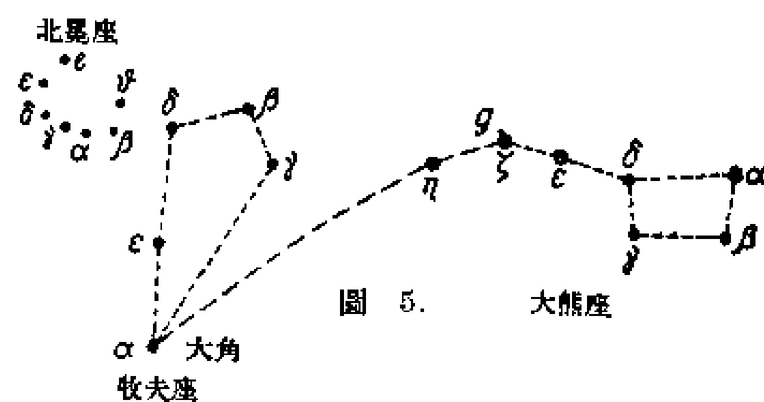


圖 5.

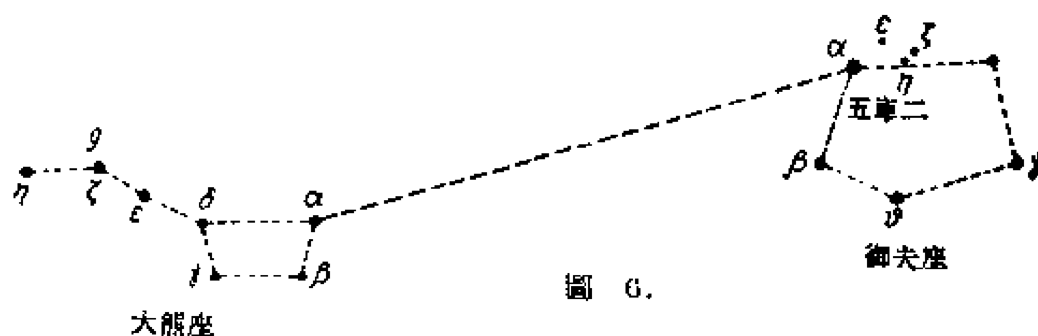


圖 6.

(圖8)。后兩个星座是属于黄道十二宮內的，認識黄道十二宮对观測太陽、月亮及行星的运行是非常重要的。黄道十二宮的名称是：白羊座、金牛座、双子座、巨蟹座、獅子座、室女座、天秤座、天蝎座、人馬座、摩羯座、宝瓶座和双魚座。

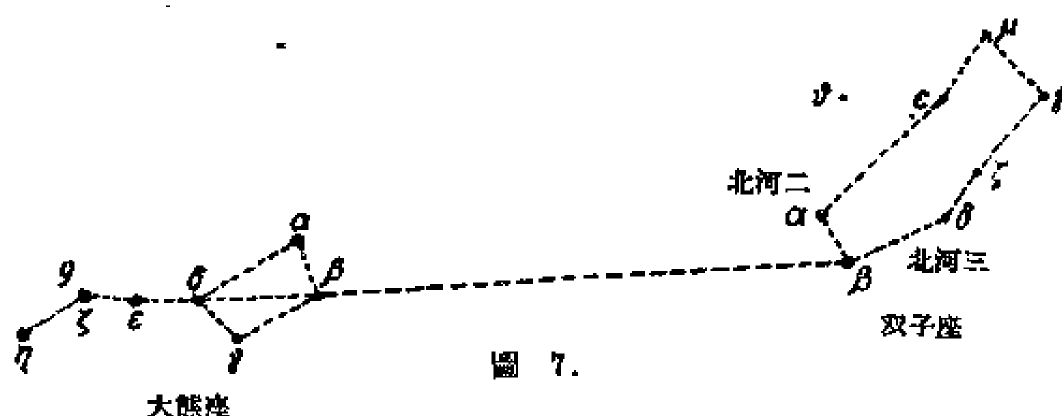


圖 7.

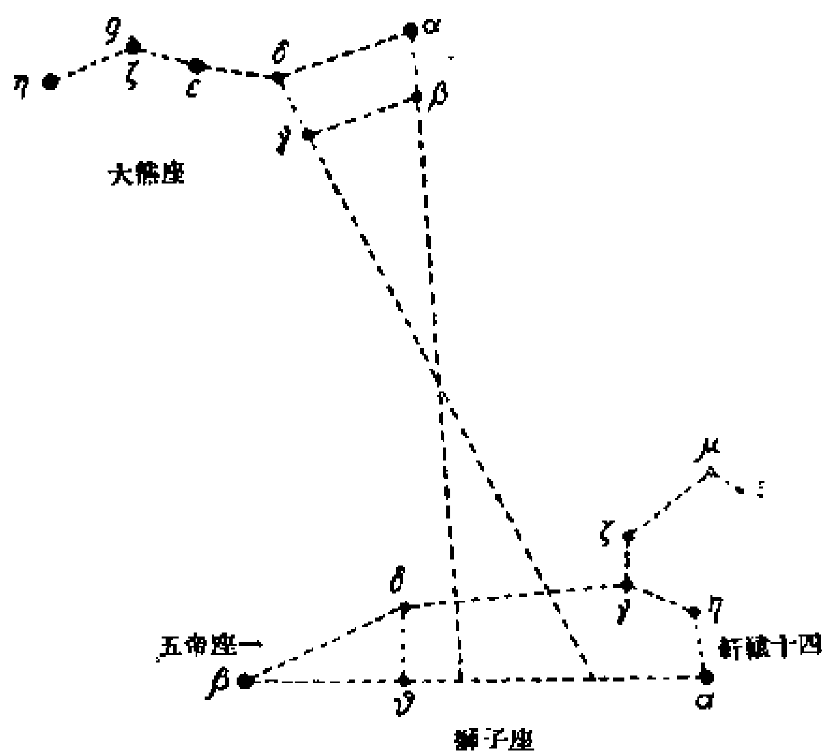


圖 8.

如果在意想中將大熊座 β 星和小熊座 β 星連結起来，并將連綫向小熊座方向延長到和銀河帶相交，那末大約就会落到巨大而美丽的十字形的天鵝座的中央，天鵝座有一顆亮星天津四(圖9)。

与天鵝座相鄰，在朝向牧夫座的方向上，有一个小小的天琴座，它具有一顆很亮的星織女一；再往下，在銀河上有一个天鷹座，它具有一顆亮星河鼓二。織女一，天津四和河鼓二構成一个特別大的、几乎是直角的三角形(圖 9)。

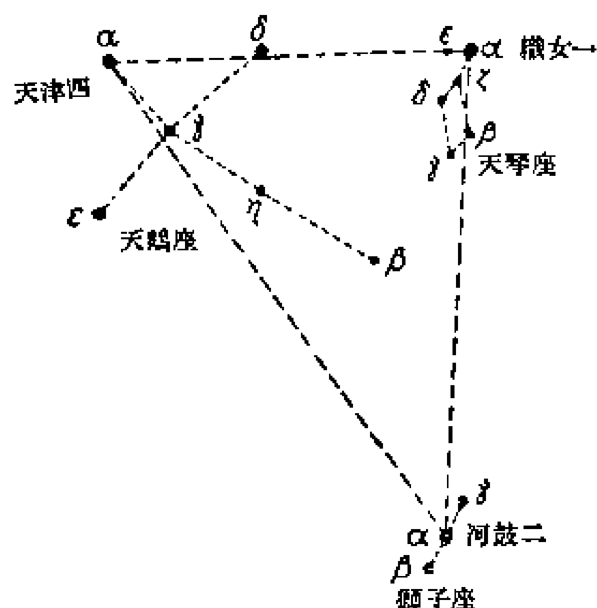


圖 9.

在南天所能看到的星座中，我們只提出兩个星座：一个是燦爛的獵戶座，它具有兩顆一等星，即参宿四和参宿七(圖 10)；另一个是与前一个相鄰的大犬座，它具有一顆全天最亮的天狼星。

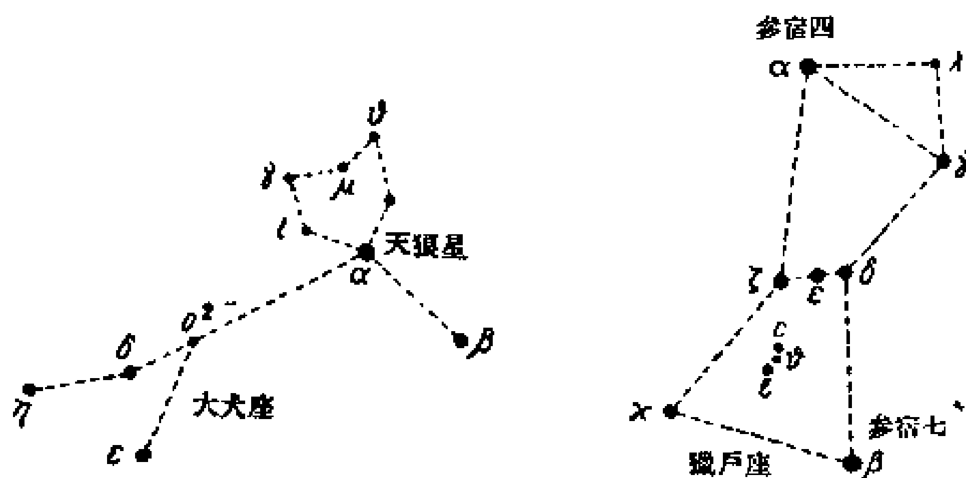


圖 10.

在标示恒星时，星座的名称經常是用的簡写。为了这一目的，自 1932 年起，在国际上开始采用所謂“四个字母”的星座簡写法。有时也用“三个字母”。現將上面已述及的星座的四个字母簡称表列如下：

Aquila	—Aqil	—Орел	天鷹座
Aries	—Arie	—Овен	白羊座
Auriga	—Auri	—Возничий	御夫座
Aquarius	—Aqar	—Водолей	宝瓶座
Bootes	—Boot	—Волопас	牧夫座
Cancer	—Canc	—Рак	巨蟹座
Canis Major	—C Maj	—Большой Пес	大犬座
Capricornus	—Capr	—Козерог	摩羯座
Cassiopeia	—Cass	—Кассиопея	仙后座
Corona Borealis	—Cor B	—Северный Венец	北冕座
Cygnus	—Cygn	—Лебедь	天鵝座
Gemini	—Gemi	—Близнецы	双子座
Hercules	—Herc	—Геркулес	武仙座
Leo	—Leon	—Лев	獅子座
Libra	—Libr	—Весы	天秤座
Lyra	—Lyra	—Лира	天琴座
Orion	—Orio	—Орион	獵戶座
Pisces	—Pisc	—Рыбы	双魚座
Sagittarius	—Sgtr	—Стрелец	人馬座
Scorpius	—Scor	—Скорпион	天蝎座
Taurus	—Taur	—Телец	金牛座
Ursa Major	—U Maj	—Большая Медведица	大熊座
Ursa Minor	—U Min	—Малая Медведица	小熊座
Virgo	—Virg	—Дева	室女座

由于星座的形狀自古以来沒有显著的变化，因而恒星的相对位置在肉眼看来是不变的，故称恒星为**不动的星**。現在这种名称仅具有一种純粹的假想意义，因为由精确的观测証明，所有的恒星都在运动着，同时它們的相互位置也随时在变化，不过这种运动和变化是很緩慢的罢了(詳細的可参閱 §61)。

此外，为了确信所有的恒星具有非常显著的假象运动或視运

动，則只需作最簡單的、短时間的观測就行了；它們也像太陽和月亮一样有出有沒：在地平綫上不断地向上升高，一直到达天空的最高位置即中天；在此以后，它們轉向天空的西部，开始逐漸下降，又重新在地平綫上消失。因为这种运动逐日地有規律地在重复，所以称之为天体的周日运动。参加周日运动的不只是恒星，而且是一切天体。正像上面所講的，由于恒星的相互位置始終是不变的，因此在古代，人們把它們的周日运动解釋成是某一透明的水晶球的旋轉，而地球則仿佛是不动地位于該球体的中心，所有的恒星都附着在該球体的內表面上。

現在我們知道，实际上根本沒有什么透明的水晶球体，至于天体自东向西的視周日运动，那末正如哥白尼所解釋的那样，它是由于地球在相反方向上繞軸的真实旋轉（即自西向东的旋轉）所引起的。

对肉眼來說，行星与恒星的区别首先在于，行星相当快地由黃道的一个宮移向另一宮。而月亮与太陽也是这样，只不过太陽对諸恒星的运动較难覺察而已。由于太陽視运动的周期为一年，所以这种运动叫做太陽的周年运动。

在古代，人們把太陽的視周年运动，行星和月亮的視运动解釋成是这些天体圍繞着不动地位于宇宙中心的地球的真实旋轉（托勒玫体系）。但自哥白尼时代起，我們就知道了地球和其余的行星都是圍繞着太陽旋轉的。

第二章　球面坐标

§7. 輔助天球，輔助天球上的点和圈·輔助天球的視周日轉动

我們所看到的一切天体，都好像是位于某一球面上，这一概念完全符合于我們的直覚，有利于对許多問題的研究，以及便于数学計算和几何作圖，所以在近代天文科学中，已把它当作一种非常有效的方法手段。近代天文学把这一概念作为有数学理論根据的輔助学說来运用。

因此，关于天球之概念，卽关于实际上不存在的球体的內表面之概念，以及天球具有如同在星空中所能观察到的那种轉动之假定，都是我們对看到的天文現实所感覚到的一种数学形态。

于是，我們把这种以空間的任意点为中心、以任意長为半徑所画成的球面叫做輔助天球，并設想在輔助天球上分布着我們所能看到的一切天体。

在球面天文学中，有时取輔助天球的半徑为無穷大，想借此来表明天球半徑比至我們所看到的任何恒星或恒星系的距离还要長；有时取半徑为 1，此仅具独特的数学意义。

我們常把天球中心設想在观測点上，或狭义地說，卽在观測者的眼睛上或在观測所用的仪器中心上。可是有时必須將天球中心設置于空間的某些特殊点上，例如地球中心，太陽中心。在后兩种情况中，天球分別称为地心天球和日心天球。反之，中心位于地面任一点上的天球則叫做地面天球。無星的或有星的天文仪或天球仪，以及天象仪圓頂的內表面，是天球的实物模型。

为了在輔助的数学模型与我們实际所看到的天文現实之間建立一定的相应关系，自天球中心作与实际所观测到的天体方向的平行綫，并把这些平行綫与球面的交点看成是所测各天体在球上的影象。

例如，設在圖 11 上的 A、B、C、D 等等是某些位于空間的、实际所观测到的天体。从輔助天球中心 O 作 Oa、Ob、Oc、Od 等等直綫，分别平行于自 M 点实际观测到的方向 MA、MB、MC、MD 等等，則得相应光綫与輔助天球表面的交点 a、b、c、d 等等，就是 A、B、C、D 等等天体的影象。对于在自然界中以这样或那样观测到的方向和平面，亦可作类似的处理。

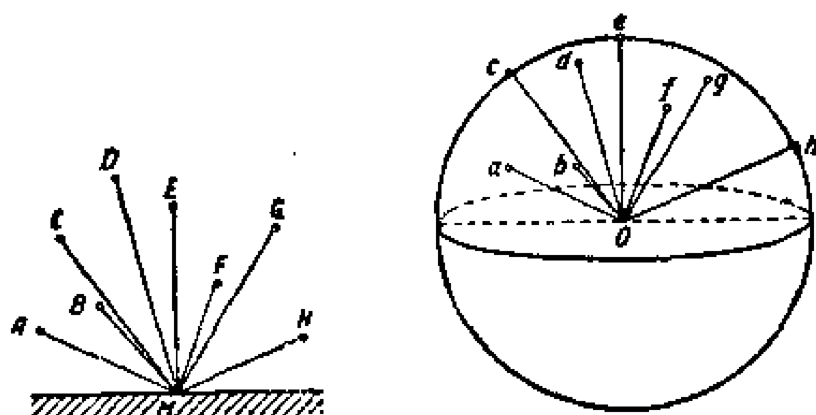


圖 11.

若天球中心与观测点 M 重合，那么就得到的平行一种特殊情况——重合，这种情况不需作特别的解釋。但要指出，通常提到的"天体为已知的"、"取某天体"等等，那不是指天体本身，而是指用上述方法在輔助天球上所得的天体影象。

由于天体方向由于天体視周日运动卽由于地球的自轉而不断地有規律地变化着，但这些方向的相对位置却保持不变，故可認为这些变化是輔助天球繞某一直綫的想象旋轉，那是旣方便而又很自然的事。

現在我們来介紹一下为了定向和为了进一步作圖所必需的天

球上的基本点与基本圈。

过輔助天球的中心，作一直綫与观测点的重力方向平行，也就是与該点的鉛垂綫平行。这一直綫与天球相交于恰恰相反的两点（圖12），其中一点恰好位于观測者头頂上称为**天頂**，以字母 Z 表示；与它相对的一点 Z' 叫做**天底**。

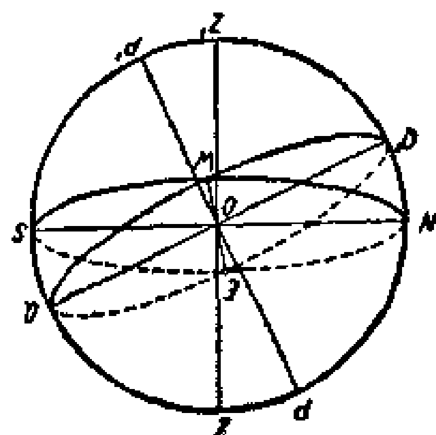


圖 12.

过天球中心 O，作一平面与 ZZ' 綫垂直；这一平面叫做**天球地平面**或**天文地平面**。它与天球相交于大圓 $NWSE$，該大圓叫做**天球地平圈**或**天文地平圈**。

过天球中心，作一直綫 PP'（圖 12）与地球旋轉軸平行；这条直綫叫做**天軸**。天軸与天球相交于恰好相反的两点 P 及 P'，这两点分别叫做**北天極**和**南天極**。所有这些名称，是自从認为天球及其周日轉动是眞实存在的时候起就有的。

从近代的观点来看，我們还可以定义天軸是一条假想的直綫，我們的輔助天球即繞着这条直綫作着視周日运动，而天極則是天球上沒有旋轉运动的点。

过天球中心 O，作一平面与天軸垂直。这一平面叫做**天球赤道面**。显然，天球赤道面与地球赤道面（地理赤道面）是互相平行的，是分别垂直于两平行直綫地軸和天軸的两个平面。天球赤道面与天球相交于大圓 $QEQ'W$，这个大圓叫做**天球赤道**。

过天軸 PP' 和天頂天底的联綫 ZZ'（鉛直綫）作一平面。这一平面叫做天球子午面，它与天球相交于大圓 $PZQSP'Z'Q'N$，此大圓叫做**天球子午圈**或**天文子午圈**。但天球子午圈以定义为**通过天極和天頂的大圈**最为方便，这一几何定义出自我們过去的几何作圖。应当注意的是，在运用上述各术語的时候，假如不会引起什么

誤解的話，那么，“天球的”和“天文的”諸形容詞可以省略。

天球子午面与天球地平面交于一直綫 NS，此直綫叫做日中綫。日中綫与天球相交的兩点，卽点 N 和 S，分别叫做北点和南点。它們也可以定义为天球地平圈与天球子午圈的交点。恰好位于地平圈上 N 和 S 中間的兩点 E 和 W，分别叫做东点和西点。天球赤道与地平圈卽相交于这兩点。天球赤道与子午圈相交的兩点，卽 Q 点和 Q' 点，分别叫做赤道的上点和下点。

凡通过 ZZ' 綫的平面均为垂直面。如果我們过天球上的某一点(例如表示天体 σ 的点)和 ZZ' 綫作半平面 $ZZ'\sigma$ 与天球相交，則得半圓周 $Z\sigma MZ'$；此半圓周叫做該点或該天体的垂直圈(圖13)。

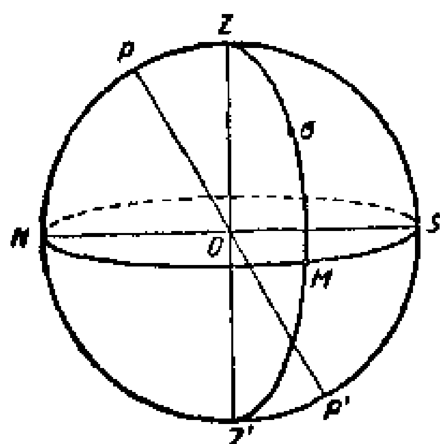


圖 13.

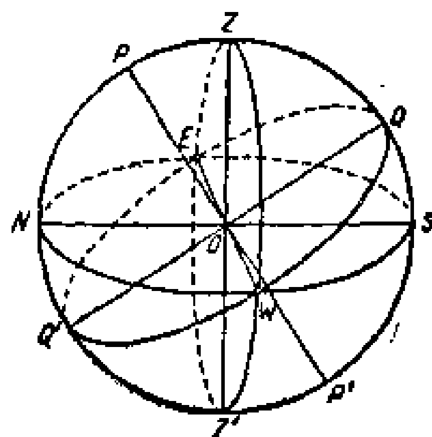


圖 14.

因此，垂直圈可定义为由天頂到天底的大圓弧，或定义为垂直平面与天球相交的大圓的一半。垂直圈与地平圈的交点，卽 M 点(圖 13)，叫做垂直圈的垂足。平面与天球子午面正交的垂直圈叫做卯酉圈(圖 14 上的 $EZWZ'$)。ZWZ' 为西卯酉圈，ZEZ' 为东卯酉圈。显然，卯酉圈在东、西点 E 和 W 上与地平圈相交。

从球面几何的观点来看：天頂 Z 和天底 Z' 是地平圈的几何極；天極 P 和 P' 是天球赤道的几何極；西点 W 和东点 E 是天球子午圈的几何極；而北点 N 和南点 S 則是卯酉圈的几何極。

地平圈將天球分成兩半：包含天頂的能够看到的一半和包括天底的不能看到的一半。赤道將天球分成兩个半球：包含北天極的北半球和包含南天極的南半球。子午圈將天球分成东西兩半。天軸也將子午圈分成包含天頂和包含天底的上半和下半兩部分。

因为地球公轉的軌道可近似地看作为一条平滑的曲綫（橢圓），所以可以設想在空間有这样的軌道平面。这一平面叫做黃道面。如果过輔助天球的中心作一平面与地球軌道面平行，那么这一平面也叫黃道面。黃道面与赤道面構成約 $23\frac{1}{2}^{\circ}$ 的角度。黃道面与天球交于大圓 $K'K$（圖 15），此大圓叫做黃道。

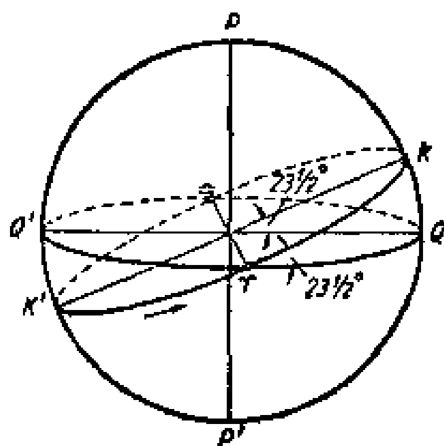


圖 15.

太陽沿着黃道与周日运动相反的方向由西向东（此方向在圖 15 上用箭头表示）作它的視周年运动，这一运动是地球圍繞太陽作实际的周年轉动的結果。因此，通常認为黃道是太陽在天球上运动的視軌迹。但这一定义是不够严密的。黃道和赤道在恰恰相反的兩点上相交，这兩点在我們的圖上用♈和♎表示。它們分别叫做春分点和秋分点。太陽通常在春季三月二十一日出現于春分点上，此时太陽在沿黃道的視周年运动中由天球南半部越过赤道向北行；在秋季九月二十三日出現于秋分点上，此时太陽由北向南行。这兩天分别叫做春分和秋分，因为在这兩天的晝与夜是相等的。

春分点♈在天文学中起着很重要的作用。

§8. 球面坐标的一般概念

为了确定天球上某一点的位置，例如某一天体的位置，必須采用球面坐标法，它与平面坐标法有些相似。为了这一目的，在球面上选擇两个任意的相互垂直的大圈，它們在球面坐标法中所起的作用，在某种程度上与平面解析几何中的坐标軸的作用相类似。

我們首先在天球上作一大圆 BMB' (圖 16)，該圓在天球上的作用与平面上的 X 軸相似，我們称其为坐标系的基圈。再标示出大圓 BMB' 的几何極 A 点和 A' 点，將其中的一个極(如 A 点)視为球面坐标系之極。为了要确定球上某一点 D 对于坐标系的基圈 BMB' 的位置，自 D 点向此大圓作一球面垂綫。为了这一目的，用大圓弧將坐标系的極 A 与 D 点联結起来，并延長該弧至另一个極 A'。沿 $ADMA'$ 圓量度的 D 点至大圓 BMB' 之距离，即 MD 弧，便是 D 点的第一球面坐标。因此，通过坐标系的極和待定点的大圓之半，便是第一坐标綫。

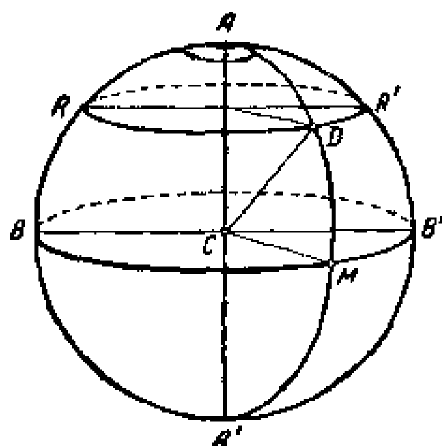


圖 16.

我們再次着重指出：坐标綫 ADA' 与基圈正交于 M 点，因为 ADA' 是通过基圈的几何極的，并且它只能是垂直于此大圈的球面垂綫。我們通常取 AD 弧代替 MD 弧做第一坐标。

可以說：在球面上正和在平面上一样，要确定点的位置，只有一个坐标是不够的。事实上，如果我們过 D 点作一平行于坐标系基圈的小圓 RDR'，則这小圓上的一切点，如 R 和 R'，它們与基圈 BMB' 的距离都相等。在平面上，一个坐标确定的是点的軌迹，即确定平行于一个坐标軸的直綫；在球面上亦相同，一个坐标 MD

或AD所确定的不是一点，而是点的軌迹，即平行于基圈BMB'(參閱圖 16)的小圖RDR'。这个小圓就是第二坐标綫。

为了求得第二个球面坐标从面需要單値地确定D点，我們就應該作如下的处理。首先过坐标系極A作半个大圓$ARBA'$，因为它通过基圈的極A点，所以这个半圓垂直于坐标系的基圈BMB'大圓。此半圓在球面坐标系中所起的作用与笛卡兒平面坐标系中的Y軸所起的作用相似。我們称此圓为坐标系的主圈或始圈。基圈与主圈的交点B相应于平面坐标的原点O；B点称为坐标系的主点或原点。

确定ADM弧对于坐标系主圈$ARBA'$半圓的位置的第二坐标，可用几种不同的几何方法来表示。現对它給出这样一个几何定义，即把坐标系的主圈面$ARBA'$与半圓面$ADMA'$之間的二面角(即二面角$BAA'D$)視为D点的第二球面坐标，由此定义又可导出D点第二坐标的其他定义。因为二面角是以平面角量度的，所以也可以取二面角的平面角$\angle BCM$作为D点的第二球面坐标。这一球心角所对之基圈弧BM，亦等于此値。根据这一几何关系，D点的第二球面坐标又可定义为由主点B到通过待定点的半圓$ADMA'$的球面距离。因为A点是BM弧的几何極，所以主圈和半圓$ADMA'$之間的球面角可用介于其兩边之圈的BM弧度之。因此，球面角BAD在数値上也等于BM弧，同时也可視为D点的第二坐标。

由此可見，这四个几何量中的任何一个都可作为D点的第二球面坐标；它們都是彼此等价和等値的，也就是說，它們都可以用同一个度、分、秒的数字来表示。因此可將其写成这样的数字等式：D点的第二坐标＝二面角$BAA'D=\angle BCM=\smile BM=$球面角$BAD$。

从解析几何的观点来看，最适合的和最方便的第二球面坐标

的表示法是后兩种表示法，即用基圈弧 BM 和以坐标系極为頂点的球面角 BAD 来表示。就第一个表示法来說：自坐标系主点 B 沿基圈計算第二球面坐标时，有兩种情形，一种是順时針方向計算。另一种是逆时針方向計算（如圖 16 所示），这兩种情形都是由 $0°$ 至 $360°$。有时也从坐标系主点 B 向兩边計算，各由 $0°$ 至 $180°$，并將向某一边計算的坐标視为正，而向相反的那一边計算的視为負。如果自坐标系極来看，坐标系的第二坐标順时針方向增長，則称为右坐标系，逆时針方向增長則称为左坐标系。因而，圖 16 所示的乃是左球面坐标系。

至于 D 点的第一坐标，那末若以該点到基圈的球面距离 MD 弧来表示，則向坐标系極 A 点計算的視为正，向相反方向計算的則为負，在这兩种情形中都是由 $0°$ 至 $90°$。这一坐标如以由坐标系極 A 点向 A' 点的球面距离 AD 弧表示，則坐标計算由 $0°$ 至 $180°$。很明显，MD 弧和 AD 弧之和为 $90°$，即：

$$\smile MD+\smile AD=90°.$$

若采用 MD 弧和 BM 弧作为 D 点的球面坐标，即兩个坐标都以弧表示，則显而易見，球面坐标系与笛卡兒平面直角坐标系有某些地方，在表面上是类似的，关于这一点，我們已在本节的开始提到过。但若采用 AD 弧和球面角 BAD 作为坐标，則可發現这一球面坐标系与平面極坐标系有許多內在的共同性。比如球面坐标系的極 A 相当于平面極坐标系的極 O，球面坐标系的主圈 $ARBA'$ 的作用类似于極軸；AD 弧可称为 D 点的球面向徑，而球面角 BAD 則相当于極角或幅角。

同时应当指出：假若設空間極坐标系的向徑等于球半徑而为一常数，在个別情况下設其为 1，則我們在上面所述的坐标系便可很容易地由空間極坐标系中得出。

天球球面坐标有若干个系統，它們彼此間的区別在于基圈、主

圈、坐标系的極和主点的选擇之不同，以及第二坐标計算的方向之不同等等。

下面我們將詳尽地来研究天文学中的四个最常用的天球球面坐标系，即地平坐标系、过渡坐标系、赤道坐标系和黃道坐标系。这些坐标系中的每一个坐标系，都有其本身的特殊意义和优点以及便利之处。在球面天文学和实用天文学中，就每一具体情况而采用不同的对此情况最适合的坐标系。除天球球面坐标系外，我們还將詳細地論述地理球面坐标系。

§9. 第一种天球球面坐标系——地平坐标系

在第一种天球球面坐标系中是以天球地平圈 NMS 作为基圈的，所以称其为**地平坐标系**，有时也叫做**水平坐标系**（但这是不够恰当的）。此坐标系的極乃是地平圈的几何極，即天頂 Z（圖17）。取天球子午圈弧 $ZLSZ'$ 为主圈，南点 S 为主点。

若想用地平坐标系来确定天体 σ 的位置，則应过天体 σ 作一垂直圈 $Z\sigma MZ'$。沿 $M\sigma$ 弧所量度的天体距地平圈的角距，是天体 σ 在此坐标系中的第一坐标，称之为**天体的地平緯度或簡称为高度**，并以 h 表示。因此，$Z\sigma MZ'$ 圈常称为**地平緯圈**。

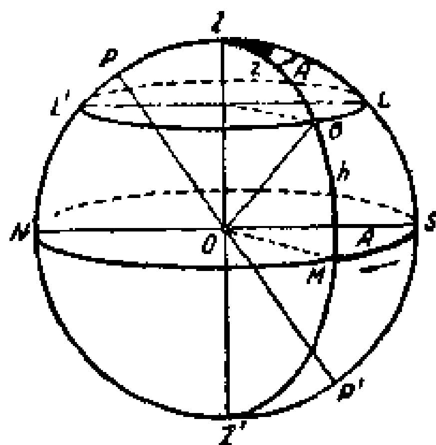


圖 17.

天体的地平緯度自地平圈起算朝上向天頂計算为正，朝下向天底計算为負。因此，地平緯度可取到由 0° 至 ±90° 間的一切数值。在航海天文学中負地平緯度叫做下降。有时常采用 $z\sigma$ 弧来代替地平緯度 h；此弧称为**天頂距**，以字母 z 表示。天頂距并不是新的独立坐标，它只是同一坐标的另一种表示法而

已。由圖 17 可知:

$$h+z=90^\circ, \tag{1}$$

即地平緯度和天頂距互为余角。若已知地平緯度，則很容易按下式求得天頂距:

$$z=90^\circ-h, \tag{2}$$

反之,若已知天頂距 z,則按下式可求得地平緯度 h:

$$h=90^\circ-z. \tag{3}$$

过天体 σ 作一平面平行于地平面。此平面与天球相交于小圓 $L\sigma L'$。这一平行于地平圈的小圓叫做地平緯圈，其球面中心是天頂 z。很明显,在地平緯圈上的一切点，具有相同的地平緯度和天頂距。

地平坐标系的第二坐标叫做方位角(地平經度)，以字母 A 表示。方位角是子午面和天体的垂直圈面間的二面角,在圖 17 上它即是二面角 $SZZ'\sigma$。同时，方位角可用子午圈与过天体的垂直圈所夾成的球面角 $SZ\sigma$(以天頂为頂点)来量度，或在地平圈上用由南点 S 起至过天体的垂直圈的垂足 M 点止的弧 MS 来量度。方位角自子午圈的南部起順时針方向計算，即从南向西、北东計算，并由 0°計至 360°。有时方位角也可以从南点向西和向东来計算，并由 0°計至±180°。此时,向西算的为正,向东算的为負。

但在大地測量学中,方位角的計算，不是从南点 S 起算的,而是从北点 N 起算的。此外，在高等測量学中尙需顧及到由于鉛垂綫与地球橢圓体(参考橢圓体)表面的法綫不相重合而产生的差异。若因这种差异微小而可忽略的話，則可近似地(即在球上)認为天文方位角和大地方位角彼此相差 180°,即:

$$A_N=A_S\pm180^\circ, \tag{4}$$

式中: A_N 为由北点 N 起算的方位角; 而 A_S 为由南点 S 起算的方位角。

§10. 天体的地平坐标因天体的周日运动而引起的变化·地平坐标与观測点的地理位置的关系

天体的地平緯度、天頂距和方位角由于本身的周日运动而不断地变化着。当天体升起的瞬間，例如在K点(圖 18)，地平緯度为 0°，而天頂距等于 90°。天体的地平緯度随着天体在地平圈上的升高而增加，而天頂距則相应地减小。这样一直繼續到天体到达在南天的子午圈时为止，例如在B点。天体在其周日运动中正好通过子午圈那一瞬的位置叫做**經过子午圈**或叫**中天**。天体經过子午圈以后，便从天球的东半部轉入天球的西半部，并开始向地平圈逐漸下降；此时，天体的地平緯度开始减小，而天頂距則开始增加。

最后，天体重又到达地平圈上的沒点，例如在L点。此时，天体的地平緯度重又为零，而天頂距为 90°。但它的周日运动在地平圈下仍繼續进行着；天体愈降愈低，其地平緯度变为負值，而天頂距大于 90°。天体在第二次經过子午圈时，位于B'点，其位置最低，这一位置也叫做**中天**。这样，每一天体在一晝夜內有兩次中天：一次在子午圈之上部B点，另一次在子午圈的下部B'点。第一次中天称为**上中天**，第二次中天称为**下中天**。有些天体，其下中天也在地平圈之上，例如在A'点。这些天体的整个周日行程都在地平圈之上完成(如AA')；它們既無升也無沒。像这样的天体叫做**不沒**天体或叫**拱極星**。一切天体在上中天时具有最大的地平緯度和最小的天頂距，反之在下中天时則具有最小的地平緯度和最大的天頂距。

現在我們来研究天体方位角的变化。在上中天瞬間，天頂以南中天的天体，如在A点和B点中天的天体（参閱圖 18)，其方位角等于 0°。然后，方位角就随着天体向西移动而逐漸增加。当

天体在其周日运动中与西半部卯酉圈相交时，或如通常所說的經过卯酉圈时(例如在 a、b 点)，其方位角等于 90°；当天体在 A'、B' 点下中天时，其方位角等于 180°；当天体在天球东半部于 a'、b' 点經过卯酉圈时；其方位角等于 270°。因此，在由天頂以南上中天的这些天体之方位角不斷地由 0°漸增到 360°。

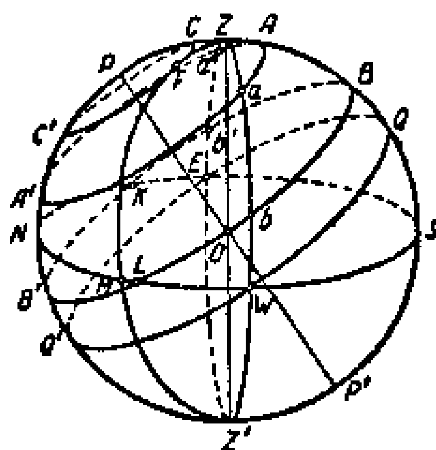


圖 18.

在天頂与天極之間，天頂以北中天的天体，其方位角变化較为复杂。当天体在上中天 C 点时，其方位角已等于 180°。上中天后，天体轉入天空的西半部，其方位角就一直減小到天体到达 F 点为止，此时天体从子午圈离去的角距达到最大。天体的这一位置称为大距。在西大距时，天体方位角的数值最小。在此以后，方位角便开始增加。在下中天时，也和所有的天体一样，方位角等于 180°。下中天后，天体轉入天空的东半部，而其方位角則繼續增加，直到天体离开子午圈的角距又达到最大而居于与 F 点对称的位置时为止。这一位置叫做天体的东大距(在圖 18 上未标出)。过了东大距之后，方位角就逐漸減小，直到上中天时为止，此时方位角又等于180°。

可見，地平坐标由于天球的周日运动而按着相当复杂的規律在不斷地变化。簡單地說，天体的地平坐标是时間的函数。由此可以得出結論：若要給出某一天体的地平坐标，則尙需指出与其相应的时刻；因而，只根据这一点，就应把关于測量时間的問題列入球面天文学研究的范圍之內。

同样不难証明，地平坐标是地面上观測点位置的函数。

事实上，由于鉛垂綫彼此是不平行的，因而地面上任何两点的

天頂，以及这兩点的天球地平圈彼此是不重合的；它們的天球子午圈也同样是不重合的。由此得出結論：即令在同一的物理瞬間，在地面上不同的兩点观測某一天体，其坐标由于据以計算的地平圈不同，子午圈不同，以及天頂及南点的不同，因而必然会有在几何上和数量上不同的数値。这一論断就証实了上述的說法，即地平坐标是观測点地理位置的函数。

因此，必須研究怎样确定地球表面上的点的位置，也就是說，必須研究关于地理坐标的問題。

§11．地面点的地理坐标系

地球的形狀非常近似于扁平的旋轉橢圓体或称之为大地球体的扁球体。但此橢圓体的扁率不大，約等于三百分之一。因此，在球面天文学和实用天文学的許多問題中可視地球为一球体，但这只是地球的第一近似形狀。

对于确定地面点的位置来說，若視地球为一球体，則可采用球面坐标法。这样所得出的坐标系叫做地理坐标系。

此坐标系中的基圈为地球赤道或地理赤道 qq'（圖 19）；坐标系的極为地球的北極 p。

为了确定地面上某一点 M 的位置，則过該点和地極 p 及 p' 作大圓半圓周；此半圓周叫做 M 点的地球子午圈或地理子午圈。以 mM 弧量度的 M 点至地球赤道的弧距是 M 点的第一地理坐标，該弧称为地理緯度，并以字母 φ

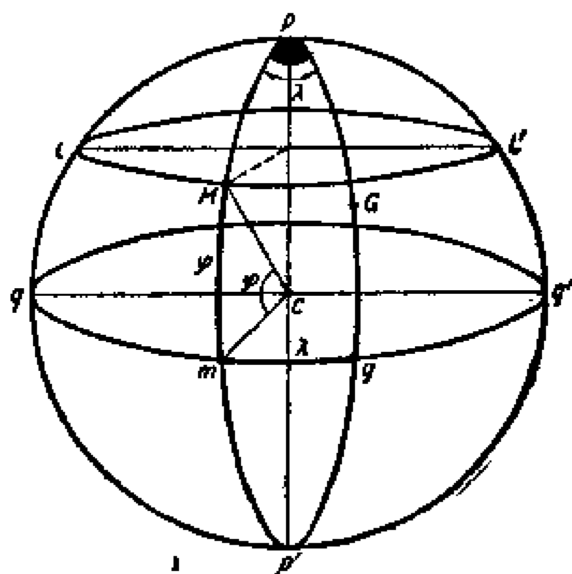


圖 19.

表示。mM 弧在数值上等于相应于 M 点的地球半徑 CM 和地球赤道面間的夾角(見圖 19)。

若視地球为正球体，則地球半徑 CM 同时也是地球表面的法綫。此时若假設地球体內質量分布是有規則的，卽設想地球是由許多同类的同心球層所組成的，而密度愈近地心愈大的話，則半徑 CM 就是 M 点的鉛垂綫方向，卽 M 点的重力方向。下面我們將証明，地面点的地理緯度 φ 可借助于天文观測而获得，并且由这种观測所得到的正是观測地点的鉛垂綫与地球赤道面間的夾角。因此，地理緯度可定义为地面点的鉛垂綫与赤道面 qCq' 間的夾角。

事实上，M 点的向徑方向(圖 20)，地球橢球体表面上 M 点的法綫方向以及該点鉛垂綫方向一般說来是不重合的。因此在需要非常严格地研究問題时，比如在高等測量学中，一般都將緯度分为地心緯度、大地緯度和地理緯度[①]三类。

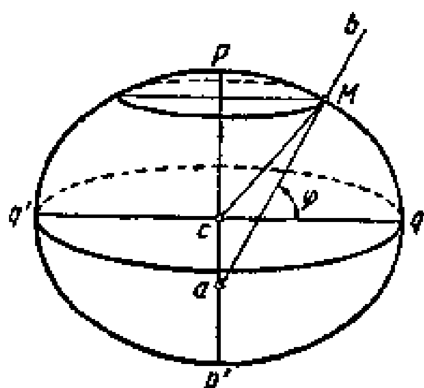


圖 20.

地面点的向徑与地球赤道面所構成的角度称为該点的地心緯度；地面点的理想橢圓面的法綫与地球赤道面間的夾角称为該点的大地緯度；至于地理緯度則是鉛垂綫与地球赤道面間的夾角(參閱圖 20)。

由于地球形如橢球体，所以地心緯度与大地緯度不相吻合。二者之差隨緯度而变，最大可达 12′(在 45° 的緯度地帶)。

由于眞正的地球表面不同于理想的橢球表面，由于地球体內部質量分布的不規則性，故大地緯度与地理緯度也是不相吻合的。这种現象叫做垂綫偏差。在地面上任何地方的垂綫偏差都可估計

① 在高等測量学中，如果地理緯度是用天文观測的方法求得的話，則称其为天文緯度。在天文学中，“天文緯度”一詞常用以表示天体的黃緯(參閱 16 节)。

为±$1''.5$—$2''$，而在某些地区，垂綫偏差很大，达到$10''$、$20''$，甚至达到$80''$。垂綫偏差可借助于一等天文測量、一等大地測量和一等重力測量的綜合結果来發現和确定。

回顧圖19，可以看出，地理緯度φ是由赤道向地球的北極和南極計算的，并且把向北極計算的視为正，把向南極計算的視为負。在航海天文学中，用“北”緯、“南”緯代替正、負号或用字母N和S表示。通过M点而平行于地球赤道的小圓lMl'叫做M点的**地理緯圈**。位于該緯圈上的一切点，若不計垂綫偏差，則有相同的緯度。

在地理坐标系中，以格林尼治(倫敦附近的天文台)的地理子午圈(即圖19上所示的半圓周$pGgp'$)作为基圈或主圈。格林尼治地理子午面与待定点M的地理子午面間的二面角$Gpp'M$便是第二地理坐标，并称之为**地理經度**，以字母λ表示。地理經度λ同样可以以格林尼治的地理子午圈与M点的地理子午圈之間頂点为地球北極的球面角MpG量度，也可以由格林尼治子午圈的垂足(即g点)到M点地理子午圈的垂足間的地球赤道上的弧gm量度。地理經度是由格林尼治子午圈起向西和向东計算的，且由$0°$至$180°$。

地理經度的計算法有三种。

第一种方法：經度由格林尼治子午圈起向西計算的为正(+)，向东計算的为負(−)。

在許多球面天文学教程中，在所有的天文年历中(包括“苏联天文年历”)，以及在許多有关球面天文学和实用天文学的專門問題的論文中，都采用这一种計算方法。

第二种方法：此法与上法相反，經度由格林尼治子午圈起向东計算的为正(+)，向西計算的为負(−)。

这一經度計算法用于高等測量学中，特别是根据世界各洲已

完成的弧度测量来推求地球橢圓体的大小和形狀的时候；在某些实用天文学教程中，以及在我国的天文、大地测量工作中，而特别是在苏联范圍內已完成的經度測定工作的整理，也都使用着这种計算方法。

第三种方法：經度由格林尼治子午圈起向西和向东計算，且由0°至180°，但这已不像前兩种方法那样以正号(＋)或負号(－)来表示計算的方向，而是以"向西""向东"，"西""东"，或以字母W和E来表示。

这种計算法广泛地应用于航海天文学和航空天文学中，以及航海学和航空学中。这种方法的优点在于能够消除經度計算方向上的任何錯誤，并能在很大的程度上減少在任何經度計算中弄錯符号的可能性。此外它还有一个特点，就是虽然在任何情况下計算西經和东經都必須有独立的計算公式，但对西半球而言，此法的公式是与第一种方法的計算經度公式一致的，就东半球而言，又是与第二种方法的計算經度公式一致的。于是，第三种計算方法的本身也就包括了上述的兩种方法，只要采用相应的符号規則便能迅速得出上述兩种方法中的任意一种方法的公式。

由于这些理由，在以后的叙述中如果沒有加注說明的話，則基本上是采用第三种經度計算法。同时，若不指明計算的方向，則所指的就是东半球的經度。

我們知道天頂距、地平緯度和方位角是随着观測者的所在位置而变化的，所以在給出这些坐标时，还必須指出观測地点的地理坐标。

§12. 第二种天球球面坐标系——过渡坐标系

地平坐标系的坐标是随时間和观測地点而定的，这在有些地方显得很不方便，所以就需要有一种沒有这些特征的坐标系。为

此，首先求出一种所謂过渡坐标系，然后就可求得这样的坐标系其两个坐标旣不以时間①为轉移，也不以观測地点为轉移，这就是所謂赤道坐标系。按这样的方法做是很方便的。

在过渡天球球面坐标系中，以天球赤道 $Q'Q$ 为基圈（圖 21），以子午圈弧 $PZQSP'$ 为主圈。天球北極 P 为坐标系的極，而主点則是赤道上的上点 Q。

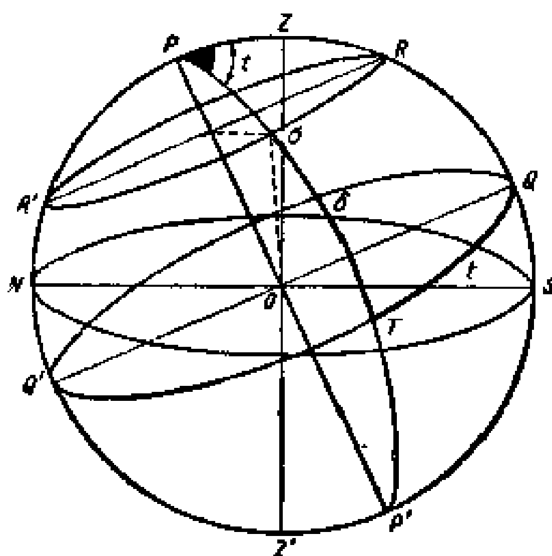


圖 21.

通过天極 P 及 P' 和某天体 σ 作半个大圓周。則在此半圓周上量度的由天体 σ 到赤道的距离——弧 $T\sigma$，便是本坐标系中天体的第一坐标，称为天体的赤緯，以字母 δ 表示。赤緯由赤道算起，向天球北極計算的自 0° 至 +90°，向天球南極計算的自 0° 至 −90°，即北半球恒星的赤緯为正，南半球恒星的赤緯为負。半圓周 $P\sigma TP'$ 叫做天体的赤經圈。

此坐标系的第二坐标为天体的时角，以字母 t 表示。

时角乃是子午圈面与天体赤經圈面間的二面角 $QPP'\sigma$。时角也可以用夾于子午圈和天体赤經圈間，而頂点为天球北極的球面角 $QP\sigma$ 量度，或以自赤道的上点 Q 到天体赤經圈的垂足 T 的弧 QT 量度。赤經圈 $P\sigma P'$ 又常称为天体的时圈。时角自子午圈上部順着时針方向針算，随着天球的周日运动由 0° 变到 360°。有时时角由子午圈起向兩边計算，各由 0° 至 180°；此时，向西計算的为正，向东計算的为負。

① 在后面我們就可看到，这只是在一阶近似值方面才是正确的。（参閱第五、六及七三章）。

通过天体 σ 并平行于赤道的天球小圆 $R'\sigma R$，因其与該天体由于天球周日运动所画成的圆周相吻合，故称为天体的周日平行圈。因为周日平行圈上的一切点具有相同的赤緯，因此很显然，天体的赤緯是不因其周日运动而变更的。

天体的时角由于天球的运动，从上中天瞬間的 0° 起不断地增加到 360°，在下中天时其値为 180°；但由于天球的轉动是均匀的，所以时角的变化也是均匀的，也就是說，时角的变化是与时間成比例的；这对于所有的天体而言都是如此。因此，时角虽然也是时間的函数，但只是一种很簡單的函数。

赤緯也不以观测地点的地理坐标为轉移。时角仅与經度有关。

§ 13. 天文学中測量时間的几个基本原則

現在我們来研究天文学中关于測量时間的問題。应当指出，时間的測量与空間的測量是有着密切联系的。

首先，我們应当确定什么是空間和时間。这是屬于哲学方面的問題。資产阶級唯心主义哲学对这一問題的回答是反科学的，是反动的。先进的科学辯証唯物主义哲学对这一問題作出了唯一正确的回答，即：空間和时間乃是不断地、有規律地运动着的物質存在的客观实在形式。根据这一論断，列宁写道：“……物或物体不是簡單的現象，不是感覚的复合，而是作用于我們感官的客观实在一样，空間和时間也不是現象的簡單形式，而是存在的客观实在形式。世界上除了运动着的物質，什么也沒有，而运动着的物質只有在空間和时間之內才能运动。”① 时間可以利用变化来測量，也就是說，測量任何时間間隔都必須有某一种运动和变化。就測量时間来說，匀速的机械运动（前进的或旋轉的）是最方便的。所謂匀

① 列宁全集 14 卷 179 頁，人民出版社 1957 年版。

速运动就是物体在相等的时間段内的位置变化是相等的。在勻速运动中物体所經过的空間与所經历的一定时間之比(速度)为一常数。观測某一勻速运动，便可按其相等的位移而判断其所历时間相等。

最初，人們是利用周圍自然界中各种惹人注目的可以直接观察到的变化(如物影長度和方向的变化)来計量时間的，但这样的量計是極其近似的。后来，人們开始制造各种器具和机械(例如:水鐘、沙鐘，具有作为調节勻速的輪子和風車的風鐘)来測量时間。在近代才出現以观察某一不变的周期現象原則为基础的計量时間的工具(例如帶有摆或平衡輪的时鐘，石英鐘)。由于它們構造很复杂，故在此不加論述。这种时間測量器在实用天文学中进行研究。

用人工制造一种持久的和理想上是均勻的机械运动是非常困难的，最适当的是直接假借于自然界。我們在自然界中可以观察到的运动中，以地球的自轉最为均勻。不錯，理論上的推論給我們指出了必然引起地球旋轉速度变化的一些原因。例如，地球由于冷却而收縮必然会使地球的旋轉运动加快，而日月引力所引起的潮汐影响，相反地必將緩慢这一轉动。但是所有这些原因所起的作用是緩慢而非常微小的，以致在很長的时期内仍可視地球的輪动是完全均勻的。至于有关証实地球轉动不均勻性的直接的实驗資料，則仅在最近才获得；这些資料显露了这种不均勻性的存在，但同时也証明了它是微小的。

因此，在天文学中，很早以前就利用了地球的自轉和它的直接反映——日日夜夜所看到的天体的視运动来測量时間，并取地球自轉一周的时間作为測量时間的基本單位。大家都知道，这个單位就是所謂日。

然而在一般地研究时間的測量問題时，以及在选擇和精确确定时間的測量單位时，必須特別注意时間和空間的相互联系以及

时間与有規律地不断地运动着的物質的联系。这种联系表現于：物質仅在时間和空間內存在，也就是仅在空間和时間內运动着。此外，还应当着重指出，單个物体的运动是不存在的，而存在的仅仅是一些物体对另一些物体的相对运动。因此，至少要具备兩个物体，才能观察运动。

地球本身的轉动，我們只有用处于地球以外的其他相对物体如太陽、星辰和想象点才能观察到，而想象点的位置也总是依星辰或太陽来确定的。

下面我們將看到測量时間的几种不同的系統或方法。它們彼此的区別仅在于測量單位和起算点的选擇上；所謂起算点就是用以开始計算的現象或事件。因此，为了确定每一个系統，就必須充分地对每一系統中所采用的时間測量單位給以明确的定义，并須指出，在此系統中采用什么时刻作为起算点。

§ 14. 恒星日·以恒星时为單位的时間的測量系統·以时單位表示角度·恒星时及春分点的时角

我們选擇春分点♈作为計算地球自轉的起算点。在实踐中，我們并不观察地球的直接轉动，而是观察它的視反映，卽呈現在我們眼中的天体繞地球的周日运动；我們所感覺到的这种运动就是轉动天球的視轉动。实际上，当观測地点的子午面隨同地球轉动經过春分点♈时，我們就看到春分点♈通过观測地点的子午圈，也就是春分点在該地点的子午圈上中天。在此，以及在以后的許多場合中，我們假定根据能够直接观察到的視运动来进行各种討論。在这一假定之下，用上法求得的，并称之为恒星日的时間測量單位，就是春分点♈在該地子午圈上連續兩次上中天之間的时間段。以春分点♈在該地子午圈上上中天的瞬間作为时間的起算点，卽作为該地恒星日的开始。

这种測量或計算时間的系統多应用于天文学中。按这种系統測量时間所得的結果，通常称为地方恒星时，并以字母 s 表示。一恒星日分为 24 恒星时，一恒星时分为 60 恒星分，一恒星分分为 60 恒星秒。所有这些單位总称为时間的恒星單位。

实际上，恒星时 s 不是別的，而是某个数，即相应于一定时刻的恒星时、分、秒和其小数的数字，換言之，就是表示这一时刻的数字或表示某一个一定时間段的数字。

为了更清楚、更正确地闡明这一問題，我們作如下的补充。

我們把那些似乎沒有任何延續的現象或事件的时間叫做时刻或瞬間。时刻或瞬間与时間的关系也就如同点与空間的关系一样。数学上的瞬間無疑地也和数学上的点一样，是一个抽象的概念。任何物理上的点虽然是極其微小，但实質上是个具有長、寬和高的物理上的物体。任何物理上的瞬間現象或事件同样具有某些延續，当然这是很小的連續；不过当应用"时刻"或"瞬間"这一术語时，我們是不注意它的。我們所說的时刻也是任一延續的現象、事件或过程的开始和結束。

初看起来，測量时間似乎有兩种不同的任务，即：測定某一瞬間和測量某一时間段。但实际上这兩个任务彼此是極其密切相关連的。很明显，測量兩个瞬間之間的时間段，也就是要求出在这一时間段內包含有多少时間單位；而測定瞬間也就是要求出从起算点到待定瞬間有多少时間單位，換言之，就是測量从起算瞬間到待定瞬間之間的时間段。由此可見，測定瞬間是以測量时間段为基礎的，而測量时間段又可并入測定瞬間之內。

任何时間段的測量都会得出这样的結果，即得出相应于这一时間段的某个一定的时間單位(例如說秒)及其小数的数字。因为測定瞬間归結于測量起算点到該瞬間之間的时間段，所以由时間段測量的結果，我們也可求得相应于此一瞬間的时間單位的数字。

因此，任何时間測量和其他一切測量一样，其所得的結果是数字。現在就很明显，假若測定了相应于某一时間段的开始和結束的具体数字，那末为了确定这一时間段的長短，只需从相应于該时間段的結束的数字中减去相应于开起的数字卽可。这可簡單而不够精确地說成："欲求得时間段，則应从时間段結束的瞬間减去其开始的瞬間"。在以后的叙述中，我們將不只一次地会遇到这种类似的說法。

研究第二种天球坐标系卽过渡坐标系时（參閱第 12 节），我們已确定时角是均匀变化着的，卽时角的变化与时間成比例。这就是說，相应于任何时間增量的一定有跟它成比例的任何天体的时角增量。这可写成一个公式：

$$t-t_0=k(s-s_0). \tag{5}$$

式中时角 t 相应于瞬間 s，时角 t_0 相应于瞬間 s_0，而 k 为比例系数。

为了决定比例系数的数值，只要知道时角在任何一个确定的时間段內的变化就够了。我們知道，在一恒星日內，卽在 24 恒星小时內，不論什么天体或天球上的任何一点的时角都变化三百六十度，因为在这一时間段內，天球轉了整整一周。因而，若时角 t 以度表示，恒星时 S 以小时表示，則得：

$$k=\frac{360^\circ}{24^h}=15. \tag{6}$$

將按（6）式求得的系数 k 之値代入（5）式得：

$$t-t_0=15(s-s_0). \tag{7}$$

利用（7）式，我們就可以詳細地研究时角随着时間的变化。

首先我們假定 s_0 为某星在某子午圈上上中天瞬間的地方恒星时。这样，就象我們所知道的那样，恒星在瞬間 s_0 时的时角为零，卽：

$$t_0=0.$$

將此値代入(7)式得:

$$t=15(s-s_0). \tag{8}$$

所以說恒星的时角是与自該星上中天瞬間起所流逝过的恒星时間成比例的。

茲以春分点♈代替恒星。因为当春分点在某地子午圈上上中天的瞬間 $s_0=0$(恒星日开始),所以在此情况下根据(8)式得:

$$t_♈=15s, \tag{9}$$

式中 $t_♈$ 是春分点的时角。換言之,自某地子午圈起算的春分点的时角与該地地方恒星时成比例。由此可反写为

$$s=\frac{1}{15}t_♈, \tag{10}$$

故很明显:某地地方恒星时与自該地子午圈起算的春分点的时角成比例。

当其他条件相同时,在各种公尺制的公式中比例系数的値,是随公式中的量的所示單位而轉移。适当的选擇或确定这些單位可使任一已知公式中的比例系数为 1。这种方法如在物理学中采用得很广。在这里我們也采用这一方法。为此,我們采用如下的方法引入新的量角單位。將一圓周分为 24 等分(圖 22),每一等分称为一弧时。該弧所对的圓心角采用为量角的單位,并称之为角时。一角时分为 60 个角时分,而一角时分則分为 60 个角时秒。这些新的量角單位分别以 h、m、s(时,

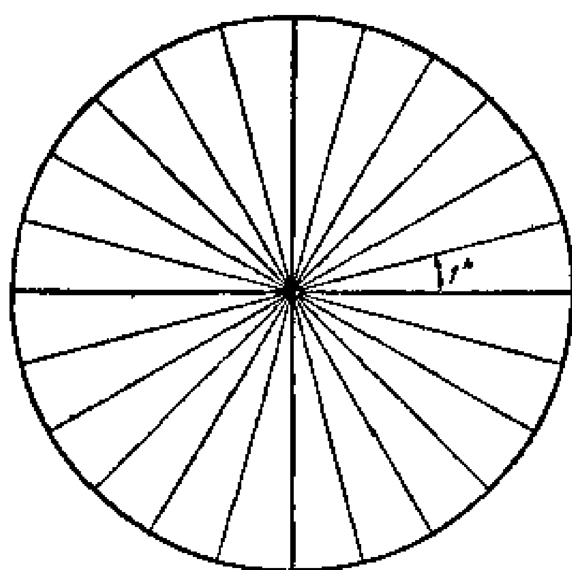


圖 22.

分，秒)表示，即与时間的單位相同，例如：若以时間單位表示 t_1，則 $t_1 = 19^h42^m53^s73$，若以度單位表示 t_2，則 $t_2 = 312°17'26''.7$。

我們很容易建立起量角的度單位与时間單位之間的关系。因为$\angle 24^h = \angle 360°$，所以很明显：

$$\angle 1^h = \angle 15°,$$
$$\angle 1^m = \angle 15',$$
$$\angle 1^s = \angle 15'',$$

反之：

$$\angle 1° = \angle 4^m,$$
$$\angle 1' = \angle 4^s.$$

利用上表，我們就不难將以度單位表示的角度用时間單位来表示，或反之，將以时間單位表示的角度用弧度單位来表示。下面的例子將說明进行这种計算的最簡便的方法。

例

1．用时間單位来表示角度 279°59′58″.8。

```
279° | 15°       59' | 15'      58".8 | 15"          18h36m
 15  | 18h       45  | 3m       45    | 3s.92          3 56s
 129             14'            138                      3.92
 120          ×   4s            135               18h39m59s.92
   9°             56s            30
×  4m                            30
  36m                             0
```

答：角度 279°59′58″.8＝$18^h39^m59^s.92$

2．以度單位来表示角度 $17^h55^m47^s.86$。

```
  17h         55m | 4m       47s.86 | 4s        255°
× 15°          4  | 13°       4     | 11'        13 45'
 170          15              7                      11 57".9
  85          12              4                 268°56'57".9
 255°         3m             3s.86
          ×   15'        ×   15"
              45'           3860
                            1930
                            57".90
```

答：角度$17^h55^m47^s.86$＝268°56′57″.9。

利用專門表来解算上述問題，如“天文測量計算用表”①第二版內的第10和11表，那就更容易了。第10表（44頁)供化时間为度之用；其結構如下：在表的左半部列有由0^h0^m至5^h59^m的时分数字，且由0^h至5^h的时数載于頂上的一列，由0^m至59^m的分数載于左边的第一行；在相应行列之交叉处，即为所求角的度、分数。第10表的右半部共分三个部分。第一部分为由0^s至59^s間各时秒所相应的度分和度秒；第二部分为由$0^s.00$至$1^s.00$間各时秒小数所相应的度秒和度秒小数；最后一部分为时的六倍数所相应的度数。

第11表供化度，分，秒，为时，分、秒之用。其結構較第10表更为簡單。在該表內分别列出由0°至179°的度数，由0′至59′的分数，由0″至59″的秒数以及由0″.00至1″.00秒小数所相应的时、分、秒数。度与分用相应的时間單位的整数表示，秒及其百分数則用相应的时秒的千分之一表示。

为了加以說明，我們再將上述兩例按表計算如下：

例

1．利用專門表將角度279°59′58″.8化为时間單位。

$$270° \cdots\cdots\cdots\cdots 18^h$$

$$9° \cdots\cdots\cdots\cdots 36^m$$

$$59' \cdots\cdots\cdots\cdots 3\ 56^s$$

$$58'' \cdots\cdots\cdots\cdots 3^s.867$$

$$0.8 \cdots\cdots\cdots\cdots 0^s.053$$

$$279°59'58.8 = 18^h39^m59^s.92$$

① “天文測量計算用表”第二版系增訂版，由K.A.契維特柯夫教授主編。中央測繪科学研究所論文集，第80期，測繪总局出版处出版，莫斯科，1939年。

2. 利用專門表將角度 $17^h55^m47^s.86$ 化为度單位。

$$
\begin{array}{ll}
12^h \cdots\cdots\cdots & 180^\circ \\
5\ 55^m & 88\ 45' \\
47^s & 11\ 45'' \\
0.86 & 12.90 \\
\hline
\end{array}
$$

$17^h55^m47^s.86 = 268^\circ56'57''.9$

一般說来，时角大都以时間單位表示。

某一天体在恒星时瞬間 s 与 s_0 的时角 t 与 t_0 用角时單位来表示，今在(5)式中确定比例系数 k 之值。在二十四小时的恒星时内，天体的时角变化一个 24^h 的角度(旋轉一整周)，因而：

$$k = \frac{24^h}{24^h} = 1. \tag{6'}$$

因此，若以时間單位表示时角，則(7)式可改写为：

$$t - t_0 = s - s_0, \tag{7'}$$

这就是說，天体时角的变化在数值上等于恒星时的增量。

若我們再取 s_0 为某星上中天的瞬間，則就該星而言，可得(8)式的代替式：

$$t = s - s_0, \tag{8'}$$

这就是說，以时間單位表示的恒星的时角在数値上等于自該星上中天瞬間起所流逝过的恒星时間段。

最后，如果我們用时間單位来表示春分点 ♈ 的时角，則可求得下式代替(9)式和(10)式：

$$s = t_{♈} \tag{10'}$$

显然上式应这样叙述：地方恒星时在数値上等于春分点的时角 $t_{♈}$，春分点的时角由該地子午圈起算，并以时間單位表示。

为了簡明起見，(10′)式經常說成："恒星时等于春分点的时角"。但是，当使用(10′)式时，必須常常記住，这仅是数値上相等，同时只有当春分点的时角以时間單位表示时才行。如果时角是以

度單位表示，那就只能說成比例而已；而此时为了进行数字計算，必須应用(9)式或(10)式来代替(10′)式。

§15 第三种天球球面坐标系——赤道坐标系

第三个天球球面坐标系中，与第二个坐标系中一样，基圈是天球赤道，主圈是春分点的赤經圈 $P\Upsilon P'$弧，即所謂二分圈 $\Upsilon P \Omega P'$(圖 23)，坐标系的極是天球北極，而主点則为春分点 Υ。此坐标系的第一坐标和第二坐标系中的一样，仍然是赤緯 δ，此外，在 §12 中关于赤緯的一切論点在这里仍然适合。第二坐标叫做赤經，以字母 α 表示，有时也表示为 AR。所謂赤經就是二分圈面和天体赤經圈面間所夾的二面角 $\Upsilon PP'\sigma$。赤經通常以赤道上由春分点到赤經圈垂足的 ΥM 弧量度，有时也用二分圈与天体赤經圈間以天極为頂点的球面角 $\Upsilon P\sigma$ 量度。

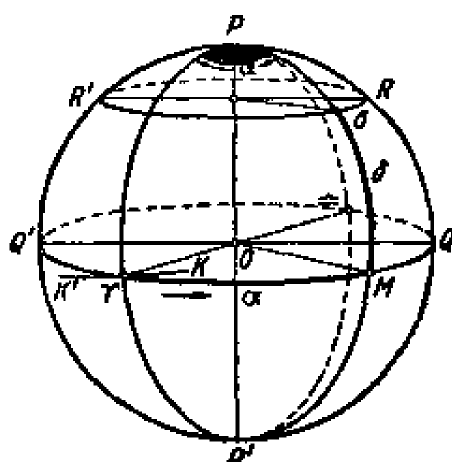


圖 23.

赤經始終以时、分、秒表示，并由 Υ 点沿与天体周日运动及时角、方位角的計算方向相反的方向进行計算（在圖 23 上以箭头所指示的方向）。

因为春分点本身亦作周日运动，所以赤經不因天球的周日运动而变化。

因为本坐标系的兩个坐标与地平圈、天頂和子午圈都不發生关系，所以它們又不以观測者的地理位置为轉移。

因而，本坐标系的兩个坐标 α 和 δ 既不依时間而定，也不依观測地点而定(但此二者都是有条件的，关于这一点参閱下面的五、六兩章)。所以，当說到“天体为已知”的时候，即意味着天体的赤道

坐标为已知。实际上，星的赤經和赤緯可从恒星表即所謂**星表**中查得；在星表中，星是按照赤經增加的程序排列的，其次还載有星的赤道系坐标和某些其他輔助値。关于这些，將于第七章內作詳細叙述。在野外实用天文学中，通常使用“苏联天文年历”中的星表（參閱“1953年的苏联天文年历”134—148頁）。

§16. 第四个天球球面坐标系——黃道坐标系

在理論天文学中利于采用黃道坐标系来研究太陽系內天体的运动。在球面天文学中，仅仅在研究某些与太陽視运动有关的問題时才采用它。

在本坐标系中，基圈为黃道 $k'k$（圖 24），坐标系的極为黃道北極 p；p 是純粹用几何方法求得的。

过天体 σ 和黃道極 p 与 p' 的大圓的半圓周 $p\sigma p'$ 叫做天体的**黃經圈**。第一黃道标为天体的**黃緯**或**天文緯度**，以字母 β 表示，并以自黃道至天体 σ 的黃經圈上的 σL 弧量度。黃緯向黃道北極計算为正、向黃道南極計算为負，即采用由 0° 至 $\pm 90^\circ$ 之値。

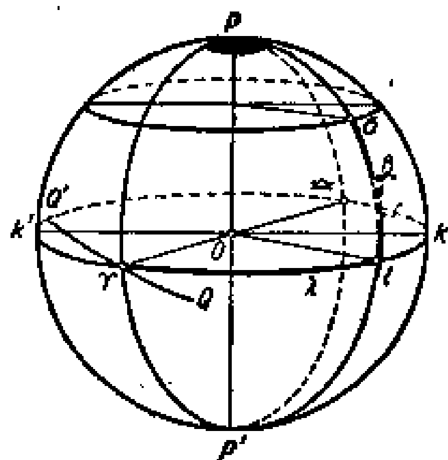


圖 24.

以黃道分圈 $\Upsilon p \text{♎} p'$ 的 $p \Upsilon p'$ 弧为主圈，以春分点 Υ 为主点。第二坐标为天体的**黃經**或**天文經度**，以字母 λ 表示，其計算沿黃道由春分点起到过天体的黃經圈垂足止，这和赤經的計算方向一样由 0° 至 360°

因此，这兩个坐标 β 和 λ 常用度單位表示。

第三章　各种坐标系坐标間的关系·周日运动的主要現象

§17. 第二种坐标系与第三种坐标系間的关系

在各种不同坐标系的坐标之間，有着極其重要的相互关系，下面我們就来加以說明。首先要談的是其中最重要的和最簡單的一些关系。

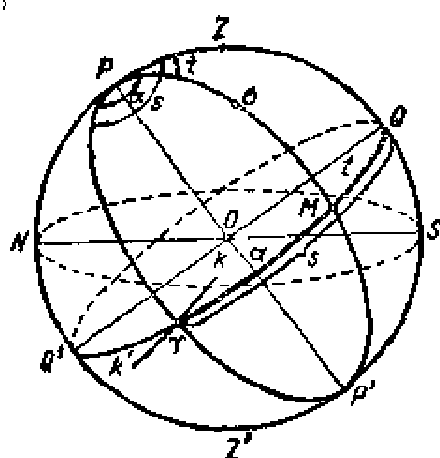


圖 25.

由于在第二坐标系和第三坐标系中，基圈都是赤道，第一个坐标又同为赤緯 δ，因而所要建立的就只是兩坐标系中的第二个坐标之間的关系，也就是天体的时角 t 与其赤經 α 之間的关系。为了这一目的，在同一圖上(圖 25)作出这兩个坐标系。由圖看出:

$$t=\angle ZP\sigma;\ \alpha=\angle \Upsilon P\sigma;$$

因而，

$$\alpha+t=\angle \Upsilon P\sigma+\angle ZP\sigma=\angle ZP\Upsilon.$$

另一方面，依 §14 所述:

$$\angle ZP\Upsilon=t_{\Upsilon}=s. \qquad (11)$$

故

$$s=\alpha+t,$$

即恒星时在数值上等于天体的赤經与其时角之和。

若將式中各量視为用赤道上的弧来量度即

$$t=QM$$

$$\alpha=\Upsilon M,$$

$$s = Q\Upsilon,$$

那也能获得同样的結果，因为由圖可知：

$$Q\Upsilon = \Upsilon M + QM.$$

在上中天的瞬間：

$$t = 0,$$

因而，就这一瞬間来說，(11)式具有下面的形式：

$$s = \alpha, \tag{12}$$

即天体上中天瞬間的恒星时在数值上等于天体的赤經。

在下中天的瞬間： $t = 12^h$,

故按(11)式得恒星时：

$$s = \alpha + 12^h. \tag{13}$$

如果这兒的 $\alpha + 12^h$ 之和大于 24^h，則需減去 24^h，这就相当于把上式改写为：

$$s = \alpha - 12^h.$$

为了能够同时表示这兩种情况，通常把(13)式写成：

$$s = \alpha \pm 12^h. \tag{13'}$$

由(11)式得出： $t = s - \alpha.$ (11′)

因此，如果知道了天体的赤經，那就可以求出任一已知瞬間的天体的时角。

例

求獅子座五帝座一在恒星时 $s = 7^h58^m9^s.93$ 瞬間的时角。

自“1953年的苏联天文年历”(第140頁，№293)中查得獅子座五帝座一的赤經为：

$$\alpha = 11^h46^m39^s.79.$$

依下面的格式計算：

$$\begin{array}{r|l} s & 7^h58^m9^s.93 \\ \alpha & 11\ \ 46\ \ 39.79 \\ \hline t & 20^h11^m30^s.14 \end{array}$$

为了在計算中够減，在 s 上加了 24^h.

§18. 地理坐标与天文坐标間的关系

为了确定地理坐标与天文坐标間的关系，我們来証明兩个定理。

定理一 測站点的地理緯度 φ 等于天極 P 的地平緯度 h_p，也等于測站点的天頂 Z 的赤緯 δ_z，即：

$$\varphi = h_p = \delta_z.$$

証明 設圖 26 中的圓周 $pq'p'qM$ 为地球，pp' 为地球的旋轉軸，$q'q$ 为地球赤道，M 为測站点。M 点的地理緯度 φ 以 M 点的地理子午弧 qM 和其所对的圓心角 qcM 量度，即：

$$\varphi = \angle qcM.$$

以 M 点为中心，以任意長为半徑，作一輔助天球；圖上所示的 $NPZQS$ 为天球的一部分。延長 M 点的向徑 cM 与天球相交，即得 M 点的天頂 Z。

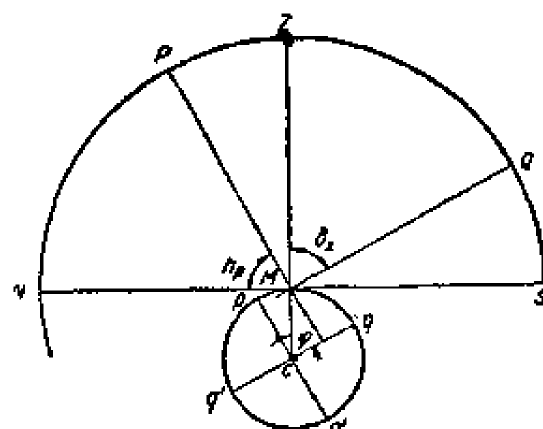


圖 26.

作天軸 PM 与地軸 pp' 平行，作天球赤道面与地軸垂直；MQ 是圖面与天球赤道面的截綫，此圖面与 M 点的子午面重合。再作測站的地平綫 NMS。此时，天極的地平緯度可用 NP 弧或 NMP 角量度，而天頂的赤緯 δ_z 可用 QZ 弧或 QMZ 角量度，即：

$$h_p = \angle NMP \text{ 和 } \delta_z = \angle QMZ.$$

但是
$$\angle qcM = \angle QMZ$$

分别是平行綫 MQ 和 cq（兩者相互平行的天球赤道面和地球赤道面与子午面的截綫）与截綫 cMZ 的交角；而

$$\angle PMN = \angle Mcq$$

的边是兩兩垂直的，因为

$$NM \perp Zc$$

分别为水平方向和垂直方向，以及

$$PM \perp cq$$

分别为天軸和位于地球赤道面上的直綫。

可知 $\angle qcM = \angle NMP = \angle QMZ$,

或 $$\varphi = h_p = \delta_z, \tag{14}$$

这就是第一定理的証明。

推：天極与天頂之間的子午弧加 φ 等于 90°，即

$$PZ = 90° - \varphi. \tag{15}$$

这是因为 $PZ = NZ - NP$,

而 $NZ = 90°$, 和 $NP = \varphi$.

这在表示天球子午截面的圖 27 中也是显而易見的。在天球子午圈上所表示出的各点是：天球子午圈与鉛垂綫的交点 Z 和 Z'，与天軸的交点 P 和 P'，与地平綫的交点 N 和 S，与赤道的交点 Q 和 Q'。此外，該圖尙指出：

$$NP = ZQ = SP' = Q'Z' = \varphi,$$

$$PZ = QS = P'Z' = Q'N = 90° - \varphi. \tag{16}$$

圖 27.

圖 28.

定理二　在兩个不同的地面点上，于同一个物理瞬間所測得的某一天体的时角之差，在数值上等于該兩点的地理經度之差。

假設 A、B 是地面上同时观測天体 σ 的兩点（圖 28）。此兩点的經度分別以 λ_A 和 λ_B 表示；至于天体 σ 的时角，則在 A 点观測时以 t_A 表示，在 B 点观測时以 t_B 表示。此时，上述定理可用公式表示如下：

$$t_A - t_B = \lambda_A - \lambda_B. \tag{17}$$

証明　設圖 28 上的 $qpq'p'$ 为地球，在地面上有兩点 A 和 B，并在此兩点上同时观測某一天体。A 和 B 兩点的地理子午圈显然是地面上的大圓的半圓周 $pAqp'$ 和 $pBbp'$；至于地球表面則正如前面所說的，乃是一个球面。G 点为格林尼治，它的地理子午圈 $pGgp'$，在計算經度时作为首子午圈。根据 $qbgq'$ 为地球赤道的，圖 28，則有：

$$\lambda_A = \smile gq,\ \lambda_B = \smile gb.$$

因而

$$\lambda_A - \lambda_B = \smile gq - \smile gb = \smile bq.$$

此經差显然可以用平面角 bcq 和 A，B 兩点的地理子午面所夾的二面角 $bpp'q$ 量度，即

$$\lambda_A - \lambda_B = \angle bcq = \text{二面角 } Bpp'A.$$

以地球中心 c 为中心，以任意長为半徑画一天球，即圖上的 $POP'Q'$。若天球中心与地球中心重合，則天軸 PP' 就是地軸 pp' 的延長綫，而天球赤道面 $Q\beta MQ'$ 就是地球赤道面 $qbgq'$ 的扩張。为了求得 A, B 兩点的天頂，用直綫將此二点与地球中心（即 c 点）联結，并延長直綫与天球分別交于 Z_A 和 Z_B。这样所得的二直綫 cAZ_A 和 cBZ_B 与在 A、B 兩点上的鉛垂綫方向一致，因而 Z_A, Z_B 就是 A、B 兩点的天頂。过天極 P 和 P'，以及 A、B 兩点的天頂分別作半圓周 PZ_AQP' 和 $PZ_B\beta P'$。此二半圓周便是 A、B 兩点的天球子午圈。在 A 点观測某一天体 σ 所得的时角 t_A，以球面角 $Z_AP\sigma$

量度;在 B 点观测同一天体所得的时角 t_B, 以球面角 $Z_BP\sigma$ 量度,即:

$$t_A=\angle Z_AP\sigma,$$

和

$$t_B=\angle Z_BP\sigma.$$

此二球面角可以采取量度它們的弧 QM 和 βM 来代替。此时,可写出:

$$t_A-t_B=\angle Z_AP\sigma-\angle Z_BP\sigma=\angle Z_BPZ_A,$$

即在 A、B 兩点上同时观测某一天体而得的时角之差,是以这兩点的天文子午圈之間的球面角来量度的。显然,这兩时角之差也可用兩子午圈之間的天球赤道弧 βQ 表示,或用平面角 βcQ 表示,或用二面角 $Z_BPP'Z_A$ 表示,此二面角的面为 A, B 兩点的天球子午面,即大圆面 $PZ_B\beta P'$ 和 PZ_AQP'。因而,

$$t_A-t_B=\angle Z_BPP'Z_A.$$

因为 A、B 兩点的天文子午面与地理子午面是互相重合的(見圖 28),此外 PP' 为公共边,所以二面角 $Bpp'A$ 和 $Z_BPP'Z_A$ 相等,即

$$\angle Z_BPP'Z_A=\angle Bpp'A,$$

因而,

$$t_A-t_B=\lambda_A-\lambda_B, \tag{17}$$

此即为第二定理的証明。

由圖 28 可以看出,A、B 兩点位于格林尼治以东。因而,(17)式对东經而言是正确的。若 λ_A 和 λ_B 为西經,則作一与此情况相适应的圖后,可求得下式:

$$t_A-t_B=\lambda_B-\lambda_A. \tag{17'}$$

因此,就西經而言,定理 II 的措詞中应添加一句"符号相反"。显然,此二公式可合并成一式:

$$t_A-t_B=\mp(\lambda_A-\lambda_B)\begin{cases}W\\E\end{cases} \tag{17''}$$

§19. 地理緯度和天体的赤緯及其中天时的天頂距間的关系

第一种情况 設天体σ于天頂以南，天頂与赤道之間达到上中天（圖 29）。以z_m表示天体在中天时的天頂距；由圖可以看出，z_m是以$Z\sigma$弧量度的，即

$$z_m = Z\sigma.$$

同理得： $\delta = Q\sigma;\ \varphi = QZ,$

由此依圖得： $$\varphi = \delta + z_m. \tag{18}$$

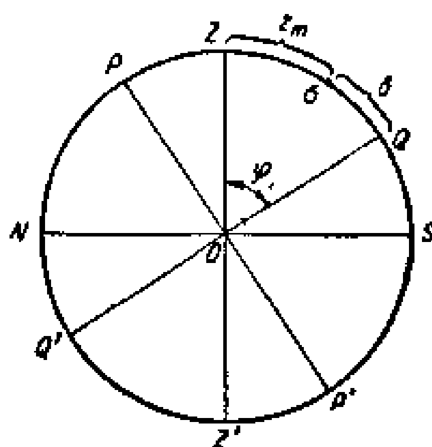


圖 29.

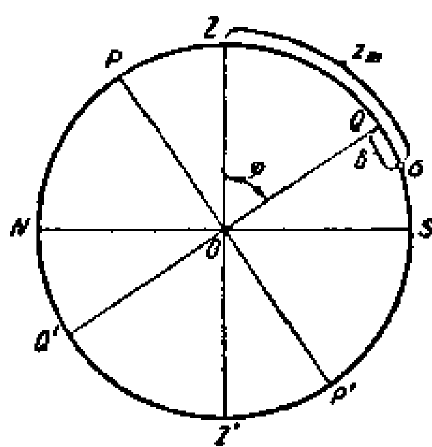


圖 30.

(18)式具有很大的原則意义和实用意义。此式表明，要測某地的地理緯度，若天体的赤緯为已知，則只需測出天体通过子午圈瞬間的天頂距就行了。

如果已知天体的赤緯和測站点的緯度，則(18)式也可用来計算天体在上中天时的天頂距。为此，將(18)式写成：

$$z_m = \varphi - \delta. \tag{19}$$

第二种情况 設天体σ在天頂及赤道以南达到上中天。由圖 30 看出，我們仍然有：

$$\varphi = QZ,$$

同样 $$z_m = Z\sigma = ZQ + Q\sigma.$$

因按§12 的規定，这兒天体的赤緯是負的，所以

$$Q\sigma=|\delta|,$$

因而，
$$z_m=\varphi+|\delta|$$

或
$$z_m=\varphi-\delta, \tag{19'}$$

这从代数观点来說是相同的。

因此，凡在天頂以南产生的上中天，不論天体的赤緯是正是負，均可采用(19)式，因而，此即賦有代数的意义。

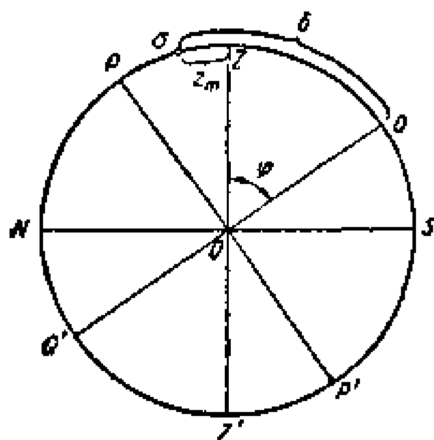


圖 31.

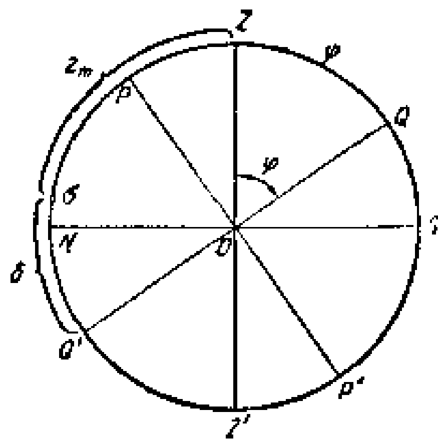


圖 32.

第三种情况 設天体 σ 的上中天是天頂以北产生的，并在天頂与北極之間(圖 31)。由圖可得:

$$z_m=Z\sigma,\quad \varphi=QZ;\quad \delta=Q\sigma,$$

$$Z\sigma=Q\sigma-QZ,$$

即
$$z_m=\delta-\varphi, \tag{20}$$

同样
$$\varphi=\delta-z_m. \tag{21}$$

第四种情况。天体在下中天(圖 32)。依圖得:

$$\delta=Q'\sigma;\quad z_m=Z\sigma;\quad \varphi=QZ.$$

同时
$$Q'\sigma+\sigma Z+ZQ=Q'Q=180^\circ,$$

因而，
$$\delta+z_m+\varphi=180^\circ,$$

由此得，
$$z_m=180^\circ-(\varphi+\delta), \tag{22}$$

同样 $$\varphi=180^\circ-(\delta+z_m). \tag{23}$$

§20. 定位三角形·球面天文学的基本公式·化赤道坐标为地平坐标。

为了建立球面天文坐标第一系和第二系的坐标間的一般关系，我們將这兩个坐标系同时作在一个圖上(圖 33)。

为了这一目的，过某一天体 σ 作一地平經圈 $Z\sigma M$ 和赤經圈 $P\sigma R$。这兩个大园和天球子午圈 PZP' 相交得一球面三角形，此三角形即为**天体 σ 的定位三角形**。三角形的三个頂点分别是天極 P、測站点的天頂 Z 和天体 σ。現在我們研究此三角形的边和角。由圖 31 可看出：

$$\smile Z\sigma=z=90^\circ-h,$$

$$\smile P\sigma=90^\circ-\delta=\Delta,$$

$$PZ=90^\circ-\varphi;$$

$$\angle PZ\sigma=180^\circ-A,$$

$$\angle ZP\sigma=t,$$

$$\angle P\sigma Z=q.$$

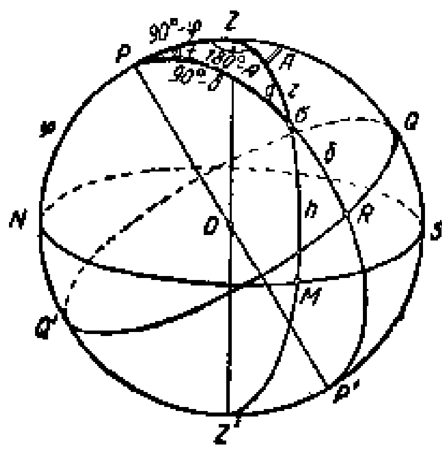


圖 33.

因此，边 $Z\sigma$, (z) 和角 $PZ\sigma$, $(180^\circ-A)$, 与第一坐标系即与地平坐标系有关；边 $P\sigma$, $(90^\circ-\delta)$ 和角 $ZP\sigma(t)$ 与第二坐标系有关；而边 PZ, $(90^\circ-\varphi)$ 与地理坐标系有关。至于頂点为天体的第三个角 $P\sigma Z$，則与任何坐标系都無关。該角称为**星位角**，以字母 q 表示。

若已知該三角形諸原素中的任意三个，則解此三角形便可求出其余的各个原素。因此，定位三角形可运用来建立球面坐标之間的各种关系和解算球面天文学尤其是实用天文学中的許多問題。

茲就这样的一种情況为例，它可导出在今后的論述中所常遇

到的、从而称为基本的公式。

設欲求在某一观測地和某一恒星时刻的某一天体的天頂距和方位角。即 α 和 δ 以及 s 和 φ 是已知的。

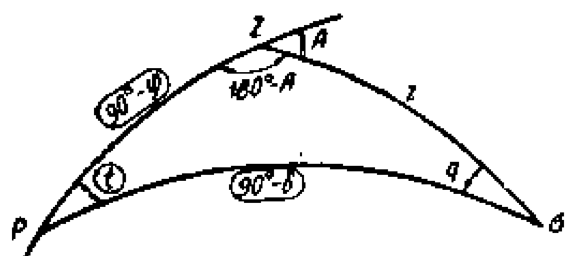


圖 34.

所求量为 z 和 A。由定位三角形 $PZ\sigma$(圖 34)可以看出，其中有兩个边和一个夾角是已知的，即：

$$PZ=90^\circ-\varphi;\quad P\sigma=90^\circ-\delta,$$

$$\angle ZP\sigma=s-\alpha=t.$$

利用球面三角中的"边的余弦"公式，且用之于 $Z\sigma$ 边，則得：

$$\cos z=\cos(90^\circ-\varphi)\cos(90^\circ-\delta)+\sin(90^\circ-$$
$$-\varphi)\sin(90^\circ-\delta)\cos t,$$

或
$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t. \tag{24}$$

根据"正弦定理"得：

$$\sin z\sin(180^\circ-A)=\sin(90^\circ-\delta)\sin t,$$

或
$$\sin z\sin A=\cos\delta\sin t. \tag{25}$$

最后，根据"五原素"公式得：

$$\sin z\cos(180^\circ-A)=\cos(90^\circ-\delta)\sin(90^\circ-\varphi)-$$
$$-\sin(90^\circ-\delta)\cos(90^\circ-\varphi)\cos t,$$

或
$$-\sin z\cos A=\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\cos t. \tag{26}$$

利用(24)式—(26) 式即可解决上述問題。这就是所謂**天文公式組**。

为了求得未知量 z 和 A，在理論上說来取上述公式中的任意兩个就足够了，但是为了用換算的方法获得以正切或余切表示未知量的公式，应同时使用三个公式。此时对它們尙須作一些便于計算的換算工作。

当用三角函数眞数表和計算机来計算时，依下列順序变換上述公式。

(26)式除(25)式得：

$$\frac{\sin z \cos A}{\sin z \sin A}=\frac{\cos\delta \sin\varphi \cos t-\sin\delta \cos\varphi}{\cos\delta \sin t}.$$

上式左边的分数中約去 $\sin z$，右边的分数中則將分子分开各除以分母，則得：

$$\operatorname{ctg} A=\sin\varphi \operatorname{ctg} t-\operatorname{tg}\delta \cos\varphi \operatorname{cosec} t. \tag{27}$$

因为計算通常是根据几个已知的恒星时瞬間进行的，所以首先依(11′)式求出每一瞬間的时角 t 的相应値：

$$t=s-\alpha.$$

繼之，示以

$$k_1=\operatorname{tg}\delta \cos\varphi, \tag{28}$$

k_1 对所有的时角都相同，可独立計算。將(28)式代入(27)式，則得計算方位角的实用公式：

$$\operatorname{ctg} A=\sin\varphi \operatorname{ctg} t-k_1 \operatorname{cosec} t. \tag{29}$$

方位角 A 的象限，应根据余切的符号并顧及到相应的时角値来确定，因为根据时角是很容易确定在該瞬間內天体位于天空的哪半部，是西半部还是东半部。

其次，(24)式除(25)式得：

$$\frac{\cos z}{\sin z \sin A}=\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos t+\sin\varphi \sin\delta}{\cos\delta \sin t}.$$

作一些类似的換算可得：

$$\operatorname{ctg} z=(\cos\varphi \operatorname{ctg} t+\sin\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} t)\sin A, \tag{30}$$

或者在这里引入相对常数：

$$k_2=\operatorname{tg}\delta \sin\varphi, \tag{31}$$

$$\operatorname{ctg} z=(\cos\varphi \operatorname{ctg} t+k_2 \operatorname{cosec} t)\sin A. \tag{32}$$

現在 A 已为已知数，故可依(32)式求 z。(25)式可供驗算之

用。

例

計算莫斯科($\varphi=55°46'$)恒星时 $s=11^h31^m.7$ 瞬間牧夫座梗河二的方位角和天頂距。

自"1953年的苏联天文年历"(142頁)中查得牧夫座梗河二(№ 351)的

$$\alpha=14^h32^m.6;\quad \delta=+29°57'.$$

利用(11′)、(28)、(29)、(31)和(32)諸式，按下面的格式計算:

φ	55°46′
δ	+29 57
$\sin\varphi$	0.82 68
$\cos\varphi$	0.56 26
$\operatorname{tg}\delta$	0.57 62
k_1	0.32 42
k_2	0.47 64
s	$11^h31^m.7$
α	14 32.6
t	20 59 .1 = 314°46′ .5
$\operatorname{ctg} t$	−0.99 22
$\operatorname{cosec} t$	−1.40 87
$\sin\varphi\operatorname{ctg} t$	−0.82 04
$-k_1\operatorname{cosec} t$	+0.45 67
$\operatorname{ctg} A$	−0.36 37
A	289° 59′
$\sin A$	−0.93 98
$\cos\varphi\operatorname{ctg} t$	−0.55 82
$+k_2\operatorname{cosec} t$	−0.67 11
Σ	−1.22 93
$\operatorname{ctg} z$	+1.15 53
z	40° 53′

驗　算

$\cos\delta$	+0.86 66
$\sin t$	−0.70 99
$\cos\delta\sin t$	−0.61 52
$\sin z$	+0.65 46
$\sin A$	−0.93 98
$\sin z\sin A$	−0.61 52

計算是利用"三角函数眞数表"和計算机进行的①。驗算說明"無誤"。

① 見"天文計算用表"第30期，第3表，第32 36頁。

为了用对数表进行計算，应作如下的換算。(25) 式以(26)式来除：

$$\operatorname{tg} A=\frac{\cos\delta\sin t}{\cos\delta\sin\varphi\cos t-\sin\delta\cos\varphi}.$$

以乘积 $\cos\delta\cos t$ 除上式右边的分子分母：

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} t}{\sin\varphi-\dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}\cdot\cos\varphi}.$$

依下列条件引入补助角M：

$$\operatorname{tg} M=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}. \tag{33}$$

將此式代入上一式則得：

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} t}{\sin\varphi-\operatorname{tg} M\cos\varphi}.$$

右边的分子分母都乘上 $\cos M$，則可写为：

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} t\cos M}{\sin\varphi\cos M-\cos\varphi\sin M},$$

或

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} t\cos M}{\sin(\varphi-M)}. \tag{34}$$

(26)式用(24)式来除：

$$\operatorname{tg} z\cos A=\frac{\cos\delta\sin\varphi\cos t-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\delta\cos t+\sin\varphi\sin\delta},$$

仍然將右边的分子分母逐項除以乘积 $\cos\delta\cos t$，則得：

$$\operatorname{tg} z\cos A=\frac{\sin\varphi-\dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi+\dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}\cdot\sin\varphi},$$

仍然根据(33)式，

$$\operatorname{tg} z\cos A=\frac{\sin\varphi-\cos\varphi\operatorname{tg} M}{\cos\varphi+\sin\varphi\operatorname{tg} M}.$$

右边的分子分母各乘以 $\cos M$，則得：

$$\operatorname{tg} z \cos A = \frac{\sin\varphi\cos M - \cos\varphi\sin M}{\cos\varphi\cos M + \sin\varphi\sin M},$$

或
$$\operatorname{tg} z \cos A = \frac{\sin(\varphi - M)}{\cos(\varphi - M)};$$

由此得
$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - M)}{\cos A}. \tag{35}$$

于是，我們可根据(33)式計算补助角 M；借所得之M值再按(34)式求 A。借此方位角值A和补助角值M按(35)式可求得天頂距 z。如果为了使計算簡化而采用补助角，則我們还应当引入一些确定此角的象限的补充条件。在計算补助角M时，要引入如下的补充条件：

$$-90° < M < +90°, \tag{36}$$

也就是說，应該根据 $\operatorname{tg} M$ 的符号，在第一象限或第四象限来选擇补助角内 M。

在按正切計算方位角A时，首先应根据时角 t 的已知值来确定恒星在天球东半部还是西半部，然后按 $\operatorname{tg} A$ 的符号来考虑方位角所在的象限。在此，以(25)式作为驗算式。

在比較利用对数表或三角函数真数表和計算机进行計算所得的結果时，往往会發現在最后一位有一个或几个單位的微小差异。这种差异大部分都沒有实际意义。它們是凑整誤差累积的結果。必須指出，在用四位表計算时，只能保証精度达到整度分或十分之几的时分。

一般在选擇計算用表时，应遵照下面的对比关系：

当計算到 0°.1 时，必須用三位表才够；
当計算到 1′ 时，必須用四位表才够；
当計算到 0′.1 时，必須用五位表才够；
当計算到 1″ 时，必須用五位表才够；
当計算到 0″.1 时，必須用六位表才够；
当計算到 0″.01时，必須用七位表才够。

这首先是对三角函数真数表来說的。至于对数表，則它們的精确程度較差。尤其在复杂的計算中，往往都要在小数点后多保

例

計算莫斯科（$\varphi=55°46'$）恒星时 $s=11^h31^m.7$ 瞬間牧夫座梗河二的方位角天頂距。

自“1953年的蘇联天文年历”中（142頁）查得牧夫座梗河二（№.351）的

$$\alpha=14^h32^m.6;\quad \delta=+29°57'.$$

利用公式（11′），（33）—（35），按下面的格式計算：

δ	$+29°57'$
s	$11^h31^m.7$
α	14 32. 6
t	20 59. 1
$\lg\operatorname{tg}\delta$	9.76 06
$\operatorname{co}\lg\cos t$	0.15 21
$\lg\operatorname{tg}M$	0.91 27
M	$89°17'$
φ	55 46
$\varphi-M$	16 29
$\lg\operatorname{tg}t$	$0.00\ 34_n$
$\lg\cos M$	9.88 88
$\operatorname{co}\lg\sin(\varphi-M)$	0.54 71
$\lg\operatorname{tg}A$	$0.43\ 93_n$
A	$289°59'$
$\lg\operatorname{tg}(\varphi-M)$	9.47 11
$\operatorname{co}\lg\cos A$	0.46 63
$\lg\operatorname{tg}z$	9.93 74
z	$40°53'$

驗 算

$\lg\cos\delta$	9.93 77
$\lg\sin t$	$9.85\ 10_n$
$\lg\cos\delta\sin t$	$9.78\ 87_n$
$\lg\sin z$	9.81 59
$\lg\sin A$	$9.97\ 30_n$
$\lg\sin z\sin A$	$9.78\ 89_n$

驗算結果相合。根据兩組公式計算的結果完全一致。計算是按“1943年的航海用表”①进行的。

---

① “1943年的航海用表”，1949年列宁格勒水文地理局，第二版，表6，第87－131頁。

持一位，这样做只是为了避免凑整誤差过甚的累积和更好地保証前一个小数位的可靠性。

相反問題的解算，即由第一天球球面坐标系化算为第二或第三天球球面坐标系，將在第八章 §71 中論述。

§21. 恒星在不同緯度下的周日运动·不沒的星，有升有沒的星，不升的星·經过卯酉圈和有大距的星

因为天極的地平緯度等于观測地的地理緯度（参閱 §18），所以在不同的地面点上所看到的星空形狀和天体周日运动的景象由于緯度的不同而不同。

我們首先假設观測者位于地球北極点。地球北極的地理緯度等于 90°；在地球北極上的天球北極的地平緯度也等于 90°。因此，該地的天球北極 P 与天頂（Z）重合（圖 35），天球南極 P' 与天底（Z'）重合，而天球赤道則与天球地平圈重合。天球北半部上的所有恒星始終是在地平圈之上，它們的周日平行圈 LL'、MM' 和 RR' 都与天球地平圈平行，也就是說这些恒星都是平行于地平圈而移动的。而周日平行圈为 KK'、FF'、GG' 的天球南半部上的所有恒星則始終是在地平圈之下，也就是說永远是看不見的。

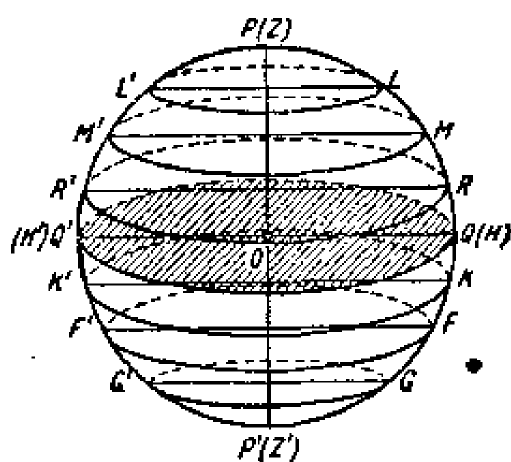


圖 35.

相反，对于在地球赤道一点上的观測者来說，地理緯度和天極的地平緯度都等于零。就該观測者看来，天球北極 P 与北点 N 重合，天球南極 P' 与南点 S 重合（圖 36）。天軸位于地平面上，并与日中綫重合。天球赤道与卯酉圈重合，而赤道的上点 Q 与天頂 Z

重合。

赤道 $Q'Q$ 和所有的周日平行圈 $L'L$、$M'M$、$F'F$、$G'G$ 都垂直于地平圈，并为地平圈所平分。因而，各星分别在 l'、m'、E、f'、g' 各点上出現；然后离地平圈升高，一开始是完全垂直地上升的；往后在 L、M、Z、F、G 各点上中天时經过子午圈；最后向地平圈下降，沒于 l, m, W, f, g 各点，并在地平圈下面繼續自己的周日运动，且分别在 L', M', Z', F', G' 各点上达下中天。这样，各天体的周日行程一半是在地平圈之上通过的，另一半是在地平圈之下通过的。因此，在赤道上的晝夜始終是相等的。

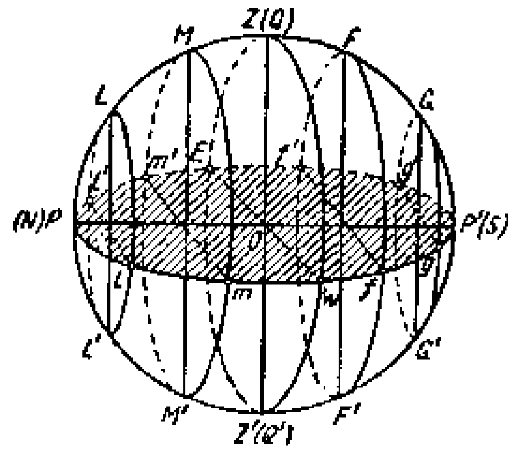


圖 36.

假設观測者位于某一个中北緯度地带上，例如 60°；对于这位观測者来說，天球北極的地平緯度同样等于 60°(圖 37)。就观測者看来，有一部分星始終在地平圈之上，这样的星叫做**不沒星**或称**拱極星**；而另一部分星則始終不出地平圈，这样的星叫做**不可見星**或**不出星**。

为了闡明星的**升沒**、**拱極**与**不可見**的条件，作这样兩顆星的周日平行圈 NR 及 FS：第一顆星在下中天时与地平圈相切于 N 点(周日平行圈 NR)，而第二顆星則在上中天时与地平圈相切于 S 点(周日平行圈 FS)。第一顆星的赤緯可以用 QR 或 $Q'N$ 弧量度，即等于 $90°-\varphi$；第二顆星的赤緯以 QS 或 $Q'F$ 弧量度，即等于 $-(90°-\varphi)$。

向北离开赤道比第一顆星更远的任何天体，例如沿周日平行圈 $L'L$ 运行的星便是**拱極星**。因此**拱極**的条件是：

$$\delta > 90^\circ - \varphi. \tag{37}$$

周日平行圈位于平行圈 NR 和 FS 之間的星，不論其赤緯为正为負都是有升有沒；例如周日平行圈为 $M'M$ 和 $K'K$ 的星便是这样。因此升沒的条件为：

$$|\delta| < 90^\circ - \varphi. \tag{38}$$

最后，位于平行圈 FS 之后靠近天球南極 P' 的星，例如周日平行圈为 $G'G$ 的星，就完全不出現于观測者的地平圈上面。所以，这一类星是看不見的。

于是，不可見的条件为：

$$\delta < 0 \text{ 和 } |\delta| > 90^\circ - \varphi. \tag{39}$$

一切天体，不問其如何投影于天球表面，每一恒星日內都有兩次經过观測地的天球子午圈：一次是在子午圈的上部經过，即在半圓周 $PZSP'$ 的某一个点上經过，此即为上中天；另一次是在子午圈的下部 $P'Z'NP$ 上經过，此即为下中天。就赤道上的观測者来說，一切天体的上中天都在地平圈以上(圖 36)，而下中天則在地平圈以下。在某一个中緯度 φ 上(圖 37)，拱極星的上下兩次中天都在地平圈以上，这兩次中天观測者都能看到。有升有沒的天体，其上中天在地平圈以上，下中天在地平圈以下，因而观測者只能看到它的上中天。最后，不可見的天体，其兩次中天却都在地平圈以下，所以它的兩次中天都不能看見。

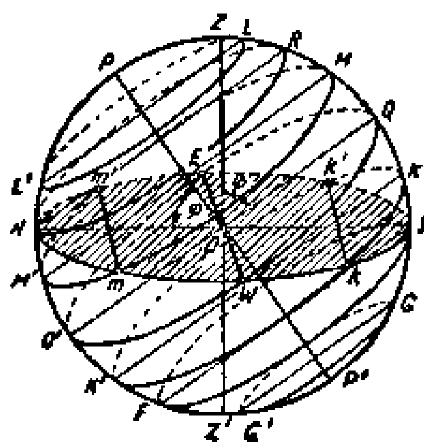


圖 37.

就位于地球的任一極上的观測者而言，那是沒有什么中天發生的，因为天体的地平緯度和天頂距由于天体的周日平行圈与天球地平圈平行而完全沒有变化。此外，又由于天極 P 和天頂 Z 重合于一点(圖35)

以致天球子午圈变为不定。

現在再假想观測者位于中緯度 φ 上。在就該观測者而描繪的天球形狀的圖上画一卯酉圈（圖 38）。在圖上我們看到有些天体，例如画出周日平行圈 $K'K$ 和 $M'M$ 的天体，各与卯酉圈相交兩次——分别在 k' 和 k，m' 和 m 的点上。这就是說，它們經过卯酉圈的东部（k' 和 m' 点）和西部（k 和 m 点）。另一些天体，例如周日平行圈为 $G'G$ 的天体，虽然也經过卯酉圈，但却在观測者的地平圈以下。最后，还有一些天体，例如周日平行圈为 $L'L$ 的天体，就根本不經过卯酉圈。这些天体正如我們在 § 10 所知道的那样，是有大距的。为了闡明所有这些現象的条件，作天体的周日平行圈 RZ；此天体在上中天时与卯酉圈切于天頂 Z，其赤緯以 QZ 弧量度，因而等于緯度 φ。周日平行圈在赤道附近（如 $K'K$ 和 $M'M$）和赤緯为正的那些天体，是在地平圈之上經过卯酉圈的。而位于赤道上的赤緯等于 0° 的天体，在东、西点經过卯酉圈，即恰好在地平圈上經过卯酉圈。因此，天体在地平圈之上經过卯酉圈的条件为：

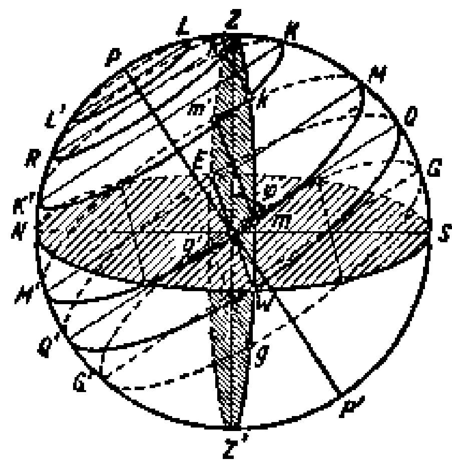


圖 38.

$$0<\delta<\varphi, \tag{40}$$

而天体具有大距的条件显然可写为：

$$\delta>\varphi. \tag{41}$$

例

已知星：烏鴉座軫宿四，天龙座女史增一，飞馬座危宿二，天鵝座天津二和半人馬座南門二；試指出在基輔（$\varphi=+50°27'.2$）地方，它們中，哪些是不沒的（拱極星），哪些是不升的（不可見的星），哪些是有升有沒的，哪些是在地平圈之上經过卯酉圈的，哪些

是具有大距的。

由"1953年的苏联天文年历"中查出这些星的赤緯如下:

烏雅座軫宿四;……$\delta=-23°\ \ 8'.2$ (141頁,№311),

天龙座女史增一……$\delta=+72\ \ 10.3$ (144頁,№428),

飞馬座危宿二……$\delta=+9\ \ 39.5$ (146頁,№532),

天鵝座天津二……$\delta=+45\ \ 0.9$ (145頁,№479),

半人馬座南門二……$\delta=-60\ \ 38.6$ (142頁,№653),

1) 根据(37)式,就基輔来說,拱極的条件为:

$$\delta>39°\ 32'.8.$$

因此在基輔不沒的星(拱極星)是:

天龙座女史增一 ($\delta=+72°\ 10'.3$),

天鵝座天津二 ($\delta=+45\ 0.9$).

2) 根据(39)式,就基輔来說,不可見的条件为:

$$\delta<0°;\qquad |\delta|>39°\ 32'.8.$$

因此在基輔不升的(不可見的)星是:

半人馬座南門二 ($\delta=-60°\ 38'.6$).

3) 根据(38)式,就基輔来說,星有升有沒的条件为:

$$|\delta|<39°\ 32'.2.$$

所以在基輔有升有沒的星是:

烏雅座軫宿四 ($\delta=-23°\ 8'.2$),

飞馬座危宿二 ($\delta=+9\ 39.5$).

4) 根据(40)式,就基輔来說,在地平圈之上經过卯酉圈的条件为:

$$0°<\delta\leqslant 50°27',2.$$

因此,在基輔地平圈之上經过卯酉圈的星是:

飞馬座危宿二 ($\delta=+9°39'.5$),

天鵝座天津二 ($\delta=+45\ 0.9$).

5) 根据(41)式,就基輔来說,有大距的条件为:

$$\delta>50°72',2.$$

因而,在基輔有大距的星是:

天龙座女史增一 ($\delta=+72°10'.3$).

§22. 天体經过子午圈

有时需要預先算出上节所述之天体周日运动中的某一現象的开始瞬間,以及在此瞬間天体对某一已知观測地的位置;在此需要

知道观測地的緯度，那怕是近似的也好。天体的位置以其地平坐标給出：天頂距 z 和方位角 A，精确度一般达到 $1'$ 或 $0',1$。因而这种現象的开始瞬間也是近似的，即精确到 1^m 或 $0^m.1$。

对于計算中天时刻 s 所必需的公式已于前节推导出来了，这些公式就是(12) 和 (13)式。对于計算中天时刻的天頂距 z_m 的公式也同样推求出来了，即(19)、(20)和(22)三式。至于方位角，則很容易从下面的推理中求得。若天体在天頂以南达上中天，例如在 M、R、F 点（圖 39)，則其方位角等于零；若天体是在天頂和北極之間上中天的，例如在 L 点，則方位角等于 180°。而在下中天，方位角則始終等于 180°（在 L', M' 等点上)。

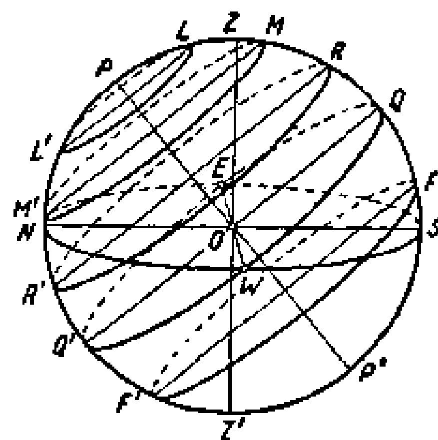


圖 39.

下面我們再次有系統地列出关于天体經过子午圈的公式。

I. 上中天

由天頂向南，$|\delta|<\varphi$，

$$s=\alpha$$

$$z_m=\varphi-\delta, \tag{42}$$

$$A=0^\circ$$

在天頂和北極之間，$\delta>\varphi$

$$s=\alpha;\quad z_m=\delta-\varphi, \tag{43}$$

$$A=180^\circ$$

II. 下中天

$$s=\alpha\pm 12^h;\quad z_m=180^\circ-(\varphi+\delta), \tag{44}$$

$$A=180^{\circ}.$$

例

計算下列各星在哈尔科夫($\varphi=50°0'.2$)能看到的中天时刻和位置:

大犬座弧矢一，天龙座右樞，巨蛇座周增七，天貓座上台增四。

由"1953年的苏联天文年历"中查得这些天体的赤經、赤緯，并分别將其湊整到$0^m.1$和$0'.1$:

大犬座弧矢一…………………$\alpha=7^h6^m.5$, $\delta=-26°19'.0$ (№200),

天龙座右樞…………………$\alpha=14\ 3.1$ $\delta=+64\ 36.0$ (№338),

巨蛇座周增七………………$\alpha=15\ 39.5$ $\delta=+19\ 49.2$ (№375),

天貓座上台增四……………$\alpha=8\ 19.6$, $\delta=+43\ 20.4$ (№223)。

將計算值列表如下:

		大犬座弧矢一	天龙座右樞	巨蛇座周增七	天貓座上台增四
上中天	s	$7^h6^m.5$	$14^h3^m.1$	$15^h39^m.5$	$8^h19^m.6$
	A	0°	180°	0°	0°
	z_m	76°19'.2	14°35'.8	30°11'.2	6°39'.8
	φ	50° 0'.2	50° 0'.2	50° 0'.2	50° 0'.2
	δ	−26 19 .0	+64 36 .0	+19 49 .2	+43 20 .4
	$\varphi+\delta$	—	114 36 .2	—	93 20 .6
下中天	z_n	—	65°23'.8	—	86°39'.4
	A	—	180°	—	180°
	s	—	$2^h3^m.1$	—	$20^h19^m.6$

圖39就是根据上例繪制的，即就哈尔科夫的緯度和这些星的地平坐标繪制而成的。如

$L'L$ 为天龙座右樞的周日平行圈，

$M'M$ 为天貓座上台增四的周日平行圈，

$R'R$ 为巨蛇座周增七的周日平行圈，

$F'F$ 为大犬座弧矢一的周日平行圈。

§23. 天体的升沒

因为天体在升和沒这一瞬間，恰好在观測地的地平圈上，所以

在这一瞬間，天体的天頂距等于 90°。因此，欲求天体升和沒时的方位角和时刻，可以假定天体 σ 的定位三角形 $PZ\sigma$ 的 $Z\sigma$ 边(圖 40)等于 90°，即

$$z=90°$$

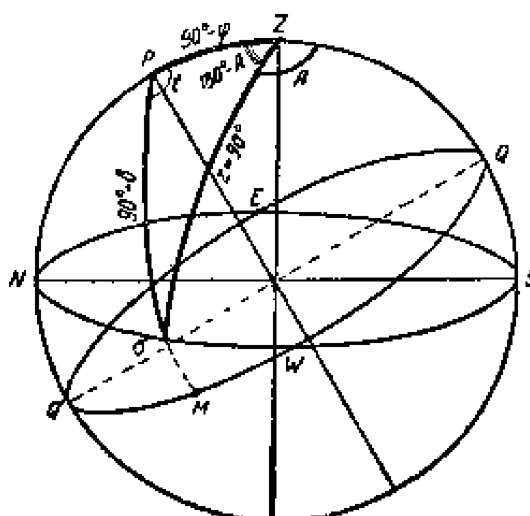


圖 40.

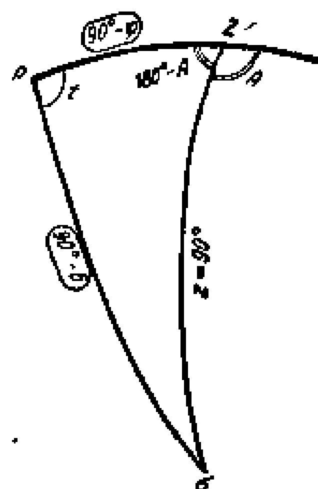


圖 41.

用較大的比例尺將这一三角形單独地表示在圖 41 上。因为問題的解算是就某一地点和某一天体而言的，所以緯度 φ 及星的坐标 α 和 δ 为已知。如此則，三角形 $PZ\sigma$ 的各边都是已知的：

$$Z\sigma=90°;\quad PZ=90°-\varphi;\quad P\sigma=90°-\delta.$$

就 $Z\sigma$ 边写出該边的"余弦"公式，即(24)式：

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t;$$

因 $\cos z=\cos 90°=0$，所以 $\cos z$ 等于 0。

此时 $$\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t=0$$

由此得： $$\cos\varphi\cos\delta\cos t=-\sin\varphi\sin\delta,$$

或 $$\cos t=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta. \tag{45}$$

按上式我們求得时角 t。因为余弦为偶函数，所以求得的时角 t 的兩个値仅符号不同。对于升和沒的时刻，按(11)式可写为：

$$s=\alpha\pm t, \tag{46}$$

式中 t 是指时角的最小値，很明显，此値与天体在子午圈西边的位

置，即与星的沒相适应。因此，对于星的升須取下面的符号，即(－)。于是

$$s_W = \alpha + t;\quad s_E = \alpha - t, \tag{47}$$

式中 t 就是剛才所談的时角的最小值，在 s 下方的W和E乃表示求得的恒星时系沒(W)或升(E)的时刻。

今就三角形 $PZ\sigma$ 的 $P\sigma$ 边写出类似于(24)式的"边的余弦"公式(圖 41)，即：

$$\cos(90^\circ - \delta) =$$
$$= \cos(90^\circ - \varphi)\cos z + \sin(90^\circ - \varphi)\sin z\cos(180^\circ - A),$$

或顧及到　　$\cos 90^\circ = 0$，和 $\sin 90^\circ = 1$，

而簡化为　　$\sin\delta = -\cos\varphi\cos A$；

由此得

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}. \tag{48}$$

根据 $\cos A$ 求得两个方位角 A 之值，与上述相似，以 A 表示方位角的最小值，以 A_E 及 A_W 分别表示天体在升和沒时的方位角，則可写为：

$$A_W = A;\quad A_W = 360^\circ - A. \tag{49}$$

对于个别的情况，如天体恰好在赤道上，即 $\delta = 0$（例如在春分日和秋分日的太陽），則按(45)式和(48)式求得：

$$\cos t = 0;\quad \cos A = 0.$$

因而，天体在升和沒那一瞬間的时角分別为 18^h 和 6^h，而在同一瞬間天体的方位角为 270° 和 90°，此即謂天体的升和沒發生于东点和西点。

其次，由(45)式和(48)式得知，若

$$\delta > 0,$$

則　　$\cos t < 0,\quad \cos A < 0$；

因而　　$t_W > 6^h,\quad A_W > 90^\circ$；

$$t_E < 18^h,\quad A_E < 270^\circ.$$

反之,若 $$\delta<0,$$

則 $$\cos t>0,\quad \cos A>0;$$

因而 $$t_W<6^h,\quad A_W<90^\circ;$$

$$t_W>18^h,\quad A_E>270^\circ.$$

換句話說,若天体的赤緯为正,則天体沒于西点和北点之間,而升于北点和东点之間。这种天体的周日平行圈的大部分位于地平圈之上,而小部分在地平圈之下。

反之,赤緯为負的天体沒于南点和西点之間,而升于东点和南点之間;其周日平行圈的小部分位于地平圈之上,而大部分在地平圈之下。

將(45)式和(48)式稍加变化后写成如下形式:

$$\cos t=-\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(90^\circ-\varphi)};\quad \cos A=-\frac{\sin\delta}{\sin(90^\circ-\varphi)}$$

因 $|\cos t|\leqslant 1$和$|\cos A|\leqslant 1$,故右边的分数也应滿足类似的不等式,即应当是:

$$\left|\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(90^\circ-\varphi)}\right|\leqslant 1;\quad \left|\frac{\sin\delta}{\sin(90^\circ-\varphi)}\right|\leqslant 1.$$

因此,

$$|\operatorname{tg}\delta|\leqslant\operatorname{tg}(90^\circ-\varphi);\quad |\sin\delta|\leqslant\sin(90^\circ-\varphi).$$

由此得出結論,要使天体有升有沒,則

$$|\delta|\leqslant 90^\circ-\varphi.$$

于是,我們用解析法求得了和在前面用純几何方法求得的相同的升沒条件[参閱§21(38)式]。

例

就莫斯科($\varphi=55^\circ45'.6$)計算牧夫座右攝提二和室女座亢宿增七的升沒时刻以及升沒点的方位角。

由"1953年苏联天文年历"中查出此二星的赤經、赤緯:

牧夫座右攝提二…………$\alpha=13^h45^m2^s$,　$\delta=+17°41'.6$(№332);

室女座亢宿增七…………$\alpha=14^h40^m35^s$,　$\delta=-5°27'.3$(№354).

根据(45)、(47)—(49)式,依下列格式計算:

用計算机計算

	牧夫座右攝提二	室女座亢宿增七
φ	55°45′.6	55°45′.6
δ	+17 41 .6	− 5 27 .3
tg δ	+ 0.31 90	− 0.09 55
tg φ	+ 1.46 93	+ 1.46 93
cos t	− 0.46 87	+ 0.14 03
t	177°56′.9	81°56′.2
t	$7^h51^m48^s$	$5^h27^m45^s$
α	13 45 2	14 40 35
s_W	21 36 50	20 8 20
s_E	5 53 14	9 12 50
sin δ	+ 0.30 39	− 0.09 50
sec φ	+ 1.77 72	+ 1.77 72
cos A	− 0.54 01	+ 0.16 88
A_W	122°41′.2	80°16′.9
A_E	237 18 .8	279 43 .1

用对数表計算

	牧夫座右攝提二	室女座亢宿增七
φ	55°45′.6	55°45′.6
δ	+ 17 41.6	− 5 27 .3
lg tg δ	9.50 38	8.98 00_n
lg tg φ	0.16 71	0.16 71
lg cos t	9.67 09_n	9.14 71
t	$7^h51^m48^s$	$5^h27^m44^s$
α	13 45 2	14 40 35
s_W	21 36 50	20 8 19
s_E	5 53 14	9 12 51
lg sin δ	9.48 27	8.97 80_n
lg cos φ	9.75 03	9.75 03
lg cos A	9.73 24_n	9.22 77
A_W	122°41′.0	80°16′.4
A_E	237 19 .0	279 43 .6

計算时所应用的表与§20的計算例中所用的相同。

用四位数进行計算,度分仅准确到整分,时分可精确到十分之一。因此,用相应的方法將所得結果湊整后得:

	牧夫座右攝提二	室女座亢宿增七	
s_W	$21^h36^m.8$	$20^h\ 8^m.3$	
s_E	$5^h53^m.2$	$9^h12^m.8$	
A_W	122°41′	80°16′	(用計算机算为17′)
A_E	237°19″	279°44′	(用計算机算为43′)

可見,在計算精度限度以內,这兩种計算方法所得的結果实际上是相同的。

室女座亢宿增七的方位角差，是由于湊盤誤差的不良累积所产生的，因此并沒有什么实际意义。

考虑到蒙气差及其他因素影响的日月升沒問題，將在第八章§72中研究。

§24. 天体經过卯酉圈

設圖42中的σ和σ'分别为天体在卯酉圈东部和西部經过时的位置。

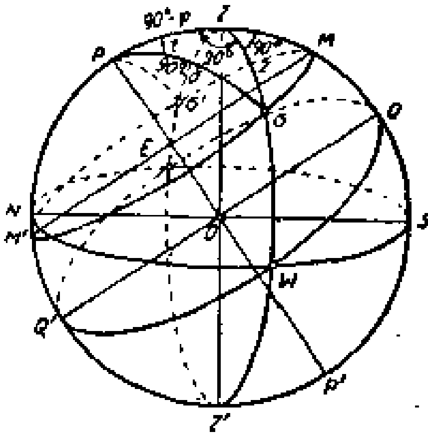


圖 42.



圖 43.

作出定位三角形$PZ\sigma$；按卯酉圈的特性，此三角形的直角在Z点。在三角形中已知兩边(圖43)：

$$PZ=90^\circ-\varphi;\quad P\sigma=90^\circ-\delta.$$

根据納白尔-莫裘規則解此三角形，則得：

$$\cos t=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi},\tag{50}$$

$$\cos z=\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}.\tag{51}$$

根据(50)式，按时角t的余弦求得t的正負二値；第一値为天体在卯酉圈西部經过时的时角値，第二値則是天体在卯酉圈东部經过时的时角値。t是以上述方法求得的时角的絕对値，s_E及s_W

分别为天体在卯酉圈的东部和西部經过时的时角，根据(11)式得：

$$s_W = \alpha + t, \quad s_E = \alpha - t, \tag{52}$$

式中 α 是天体的赤經。

天体在卯酉圈西部的方位角等于 90°，在东部的等于 270°，即：

$$A_W = 90^\circ; \quad A_E = 270^\circ. \tag{53}$$

研究(50)，(51)二式，并顧及到余弦的絕对値是不大于 1 的，則我們可用解析法求得前面用几何方法求得的天体經过卯酉圈的条件[見(40)式]，即：

$$0 < \delta < \varphi$$

事实上，若 $|\cos t| \leqslant 1, \quad |\cos z| \leqslant 1;$

則 $\left|\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}\right| \leqslant 1.$

因而， $|\operatorname{tg}\delta| \leqslant \operatorname{tg}\varphi, \quad |\sin\delta| \leqslant \sin\varphi;$

由此得 $|\delta| \leqslant \varphi.$

此外，根据(51)式，当

$$\delta < 0,$$

得 $\cos z < 0,$

即 $z > 90^\circ.$

因此，赤緯为負的星，是在地平圈之下經过卯酉圈的。顧及到这一点并忽略 $\delta = \varphi$ 的这一極限情况，便可求得星在观测者的地平圈之上經过卯酉圈的条件：

$$0 < \delta < \varphi.$$

例

就基輔($\varphi = 50°27'.2$)計算双子座北河三經过卯酉圈的东部和西部的时刻，以及在此时刻天体的位置。

由"1953 年的苏联天文年历"中查得双子座北河三(№216)的

$$\alpha=7^h42^m27^s;\quad \delta=+28°8'.5.$$

根据(50)(53)式,按下列格式进行計算:

用計算机計算

tg δ	0.53 48
ctg φ	0.82 57
cos t	0.44 16
t	63°47′.7
t	$4^h15^m11^s$
α	7 42 27
s_W	11 57 38
s_E	3 27 16
sin δ	0.47 16
cosec φ	1.29 69
cos z	0.61 16
z	52°17′.8
A_W	90°
A_E	270°

用对数表計算

lg tg δ	9.72 82
lg ctg φ	9.91 68
lg cos t	9.64 50
t	$4^h15^m11^s$
α	7 42 27
s_W	11 57 38
s_E	3 27 16
lg sin δ	9.67 36
lg cosec φ	0.11 29
lg cos z	9.78 65
z	52°17′.5
A_W	90°
A_E	270°

于是我們求得:

在卯酉圈西部 $s_W=11^h57^m38^s$, $z=52°18'$, $A_W=90°$;

在卯酉圈东部 $s_E=3^h27^m16^s$; $z=52°18'$; $A_E=270°$.

上述計算系按"天文計算用表"和"1943 年的航海用表"(§20)进行的。

§25. 大距

选一具有大距的天体(圖 44),幷首先来詳尽地研究它的方位角的变化。假設我們站在輔助天球的外面,从北方来观察它(圖 45)。此时天球子午圈为直綫 $ZPNZ'$,而天体的周日平行圈为椭圓形 $KBLCK'C'L'B$。在上中天时,即在 K 点时,天体的方位角以地平圈的弧 SWN 量度,其値等于 180°。当天体因天球的周日运动而沿着自己的周日平行圈运行至 B 点时,其方位角則以弧 SWD 量度,且小于 180°,因而方位角是在減小着,它一直減小到天体运行到 L 点为止;在 L 点天体的垂直圈 ZLM 与其周日平行

圈相切。天体的这一位置，正如我們所知道的那样，称为天体的西大距。

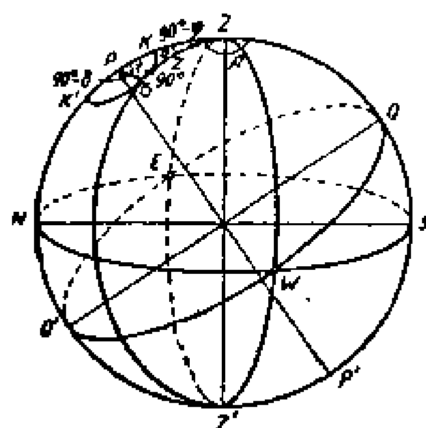


圖 44.

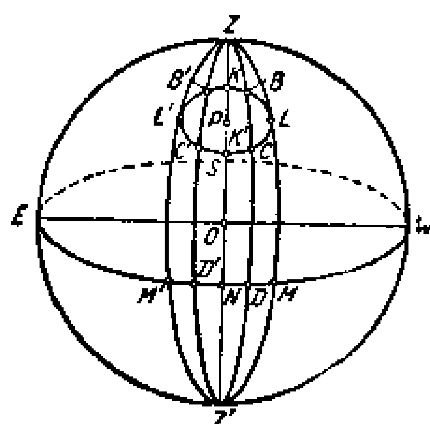


圖 45.

为了更好地極其清楚地了解这种情况以及天体方位角的一般变化，將天球投影于地平面上（如圖 46 所示）。因此，Z 为天頂，EW 为卯酉圈，SZN 为天球子午圈，圓周 $KBLCK'C'L'B'$ 为天球的周日平行圈。在 45 和 46 兩个圖上的相应点旁边注以相同的字母，以便彼此对照。在 L 点，天体的方位角以地平圈的弧 SWM 量度，很明显其值为最小。

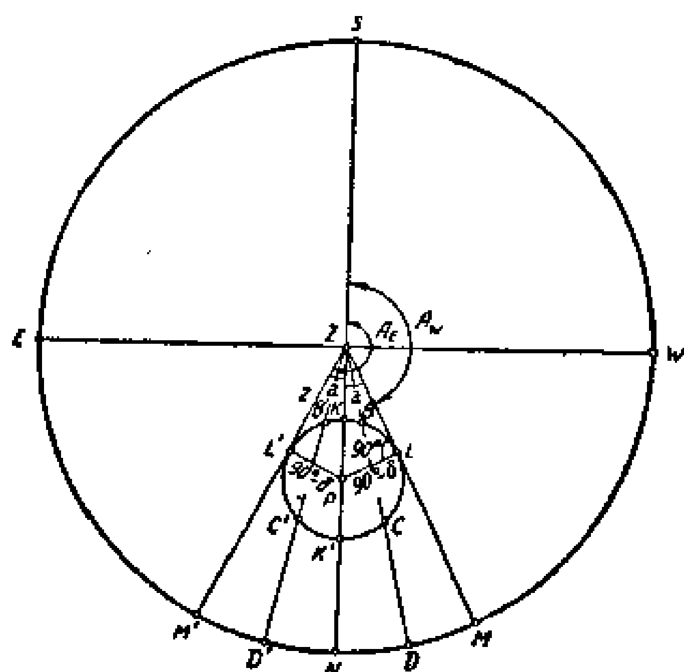


圖 46.

現在当天体繼續运行至 C 点时，其方位角重以弧 SWD 量度，也就是說，它又从新增大了。这样的增大一直繼續到东大距即 L' 点为止。天体在兩个大距的中間 K' 点下中天，此处天体的方位角重为 180°。天体在

东大距的方位角为最大，过后又开始减小，例如在 B' 点的方位角和在 C' 点一样。

为了能够预先計算出天体在大距时的时刻和位置，須作一定位三角形(圖 44, 46 和 47)，为此作天体的赤經圈 PL 和垂直圈 ZL(在圖 44 和 47 上分别是 $P\sigma$ 和 $Z\sigma$)。因为在切点 L 所作的半徑 PL 垂直于切綫，所以三角形 $PZ\sigma$ 是直角頂点在 σ 点的直角三角形，即在大距时星位角 q 等于 $90°$。

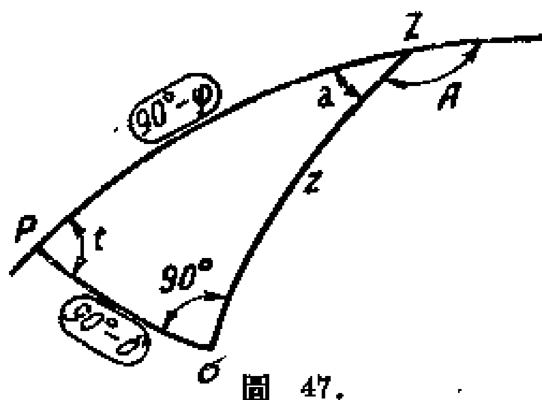


圖 47.

我們以 a 来表示頂点在天頂的三角形的內角。設 φ 和 δ 为已知，按納白尔-莫裘規則解此三角形，則得：

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta}, \tag{54}$$

$$\cos z = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \tag{55}$$

$$\sin \mathrm{a} = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}. \tag{56}$$

像在前节那样进行类似的討論，按下列公式求出东、西大距的相应时刻。

$$s_W = \alpha + t; \quad s_E = \alpha - t. \tag{57}$$

根据圖 46 容易了解，天体的相应方位角 A_W 和 A_E 可按下列公式求得：

$$A_W = 180° - \mathrm{a}; \quad A_E = 180° + \mathrm{a}. \tag{58}$$

例

就基輔($\varphi = 50°27'.2$)計算仙后座關道三的大距的时刻和位置。

由"1953年的苏联天文年历"中查得仙后座閣道三(№35)的:

$$\alpha=1^h22^m43^s;\qquad \delta=+59°59'.5.$$

根据(54)(58)式,按下列格式进行計算:

用計算机計算

tg φ	1.21 11
ctg δ	0.57 76
cos t	0.69 95
t	45°36'.7
t	$3^h2^m27^s$
α	1 22 43
s_W	4 25 10
s_E	22 20 16
sin φ	0.77 11
cosec δ	1.15 48
cos z	0.89 05
z	27°3'.8
cos δ	0.50 01
sec φ	1.57 06
sin a	0.78 55
a	51°46'.1
A_W	128 13 .9
A_E	231 46 .1

用对数表計算

lg tg φ	0.08 32
lg ctg δ	9.76 16
lg cos t	9.84 48
t	$3^h\ 2^m28^s$
α	1 22 43
s_W	$4^h25^m11^s$
s_E	22 20 15
lg sin φ	9.88 71
lg cosec δ	0.06 25
lg cos z	9.94 96
z	27°5'.0
lg cos δ	9.69 92
lg sec φ	0.19 60
lg sin a	9.89 52
a	51°47'.0
A_W	128 13 .0
A_E	231 47 .0

于是,凑整至1'和$0.^m1$,得:

对于西大距

$$s_W=4^h25^m.2,\quad z=27°4'(\text{用对数表計算为}5')，$$

$$A_W=128°14'(\text{用对数表計算为}13')。$$

对于东大距

$$s_E=22^h20^m.3;\quad z=27°4'(\text{用对数表計算为}5')$$

$$A_E=231°46'(\text{用对数表計算为}47')。$$

在計算时用三角函数眞数表(用計算机)和对数表求得的天頂距和方位角之誤差均为1';这正如上面所說的那样,是沒有什么实際意义的,只是說明在这兩种情况中凑整誤差的累积有差別(参閱§20)。

§26. 天頂距和方位角变化的解析研究

天体的地平坐标 z 和 A，由于它們是随着天球的周日运动而在不断地变化的，故此二坐标是时間的函数。为了詳細地研究这种变化，必須就时間求出这些函数的导数式，并闡明它們在周日运动各个不同时刻的特性。

首先来研究**天頂距**。天頂距和时間的关系可以以§20和§17内的(24)和(11′)兩式联合表示：

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

和

$$t = s - \alpha,$$

視 s、t 和 z 为变数，α、δ 和 φ 为常数，微分上面二式，則得：

$$-\sin z\, dz = -\cos\varphi\cos\delta\sin t\, dt,$$

或將(25)式

$$\cos\delta\sin t = \sin z\sin A$$

代入上式，并約去 $-\sin z$，則得：

$$dz = \cos\varphi\sin A\, dt, \tag{59}$$

由此得

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi\sin A. \tag{60}$$

(11′)式微分后为：

$$dt = ds, \tag{61}$$

因而，

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}. \tag{62}$$

由此可見，根据时間 s 的变化或是根据时角 t 的变化来研究天頂距的变化是沒有区别的。这对于方位角来說亦相同。

令导数 $\frac{dz}{dt}$ 等于零，求函数的極值。显然，这是在下面的条件下發生的，即

$$\sin A = 0,\quad A = 0° \text{或} 180°;$$

也就是說在子午圈上和在上中天或下中天时才有可能。無需作进一步的研究便可看出，在上中天时的天頂距为最小，在下中天时的

天頂距則为最大。利用上述这二个 A 値，以公式(24)和(25)为基础就很容易用解析法推出中天时的天頂距公式(19)，(20)和(22)，这些公式在 § 19 中是用几何法推出的。

此外，由此也应得出結論：在子午圈上天頂距变化的速度为零，即天体在子午圈上是平行地平圈移动的。

因为在天球西半部 $\sin A$ 为正，所以

$$\frac{dz}{dt}>0,$$

因而在天球西半部天頂距是逐漸增加。

在天球东半部則相反，$\sin A$ 为負，故

$$\frac{dz}{dt}<0,$$

因而，在天球东半部天頂距是逐漸减小。

其次，(60) 式指出，在一定的观測地，天頂距变化的速度仅以方位角为轉移。因此，在某一瞬間位于同一垂直圈上的一切天体，不問其地平緯度如何，其天頂距是以相同的速度变动的。

当导数 $\frac{dz}{dt}$ 的絕对値为最大时，z 將以最大的速度变化。很明显，这是在

$$\sin A=\pm 1,\quad A=90^\circ \text{或} 270^\circ$$

的时候；也就是在卯酉圈的时候；此时(60)式可写为：

$$\frac{dz}{dt}=\pm\cos\varphi\,. \tag{63}$$

因此，在卯酉圈上的所有天体，不管其地平緯度如何，其天頂距都是以最大的而且是相等的速度变动；这种速度仅以观測地的緯度 φ 为轉移。

(59)，(60) 和 (63)三式，除了其理論上的意义以外，尙具有实用价値。利用这些公式，很容易算出在短时間內天頂距的变化，且还具有足够的精度。

由高等数学知道，精度达到一級微小量的微分可用有限改变量代替，即假設：

$$dt = ds = \Delta t = \Delta s, \quad dz = \Delta z;$$

式中 Δt，Δs 和 Δz 表示时角、恒星时和天頂距的微小的有限改变量，例如就 Δt 和 Δs 来說不大于 30^m—40^m。此时(59)式可写为：

$$\Delta z = 15 \cos \varphi \sin A \, \Delta t,$$

或
$$\Delta z = 15 \cos \varphi \sin A \, \Delta s. \tag{64}$$

因天頂距的改变量 Δz 通常以度表示，而 Δt 和 Δs 以时間表示，故式中出現系数 15。

对子午圈来說則有： $\Delta z = 0,$

即在子午圈上天頂距不發生变化。

对卯酉圈来說則有

$$\Delta z = \pm 15 \cos \varphi \, \Delta t,$$

或
$$\Delta z = \pm 15 \cos \varphi \, \Delta s. \tag{65}$$

假定(64)式中的 $\Delta t = \Delta s = 1^m,$

則根据公式
$$\Delta z' = 15' \cos \varphi \sin A \tag{64'}$$

容易算出对于任何緯度和任何方位角的天頂距在一分鐘內的变化。

就卯酉圈而言，我們可根据(65)式用同样的方法求得：

$$\Delta z' = \pm 15' \cos \varphi. \tag{65'}$$

在这兩种情况中，我們都以 $\Delta z'$ 表示天頂距在一分鐘內的改变量，这是以度分表示的。例如，就莫斯科而言，(65′)式所給出的为 $8'.4$（參閱書末附录 III “在卯酉圈上天体的方位角和天頂距的微改变量表”）。

現在来研究**方位角**。根据以前在 §20 內推算出来的公式，方位角与时間的关系可綜合(26)，(24)和(11′)三式来表示：即

$$-\sin z \cos A = \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t,$$

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

$$t = s - \alpha.$$

以 s、A、z 和 t 为变量，以 α、δ 和 φ 为常数，微分此三式，就(26)式得:

$$-\cos z\cos A\,dz + \sin z\sin A\,dA = \cos\delta\sin\varphi\sin t\,dt,$$

或 $$\sin z\sin A\,dA = \cos\delta\sin\varphi\sin t\,dt + \cos z\cos A\,dz.$$

其余二式的微分结果，我們已知其为(59)式和(61)式。

根据(25)式，以 $\sin z\sin A$ 代替 $\cos\delta\sin t$；而 dz 则以(59)式代替。于是可得:

$$\sin z\sin A\,dA = (\sin z\sin A\sin\varphi + \cos z\cos A\sin A\cos\varphi)dt.$$

由此决定导数 $\frac{dA}{dt}$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sin z\sin\varphi + \cos z\cos\varphi\cos A}{\sin z}. \tag{66}$$

如果我們取定位三角形(圖 33 或圖 34)，并用五元素公式于边 $P\sigma$ 和角 $P\sigma Z$，则可写出:

$$\sin(90^\circ - \delta)\cos q = \cos(90^\circ - \varphi)\sin z -$$
$$-\sin(90^\circ - \varphi)\cos z\cos(180^\circ - A),$$

或簡化为:

$$\cos\delta\cos q = \sin\varphi\sin z + \cos\varphi\cos z\cos A. \tag{67}$$

因(66)式分数中的分子同(67)式的右边一致，故可將(66)式改写为:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}. \tag{68}$$

为了研究得全面一些，我們还要为 $\frac{dA}{dt}$ 推导出一个公式。为此，將(66)式中右边的分子除以分母，則得

$$\frac{dA}{dt} = \sin\varphi + \cos\varphi\frac{\cos A}{\operatorname{tg} z}. \tag{68'}$$

令(68)式导数 $\frac{dA}{dt}$ 等于零，我們便可求出在

$$\cos q=0;\ q=90^\circ$$

的条件下 A 的極值，即大距时 A 的極值。于此很明显，在西大距 A 值为最小，在东大距則为最大。对于沒有大距的天体来說，q 不可能等于 90°，因而这些天体的方位角無極值。因为这些天体的 q 始終小于 90° 所以在这种情况下，导数$\frac{dA}{dt}$总是为正，而方位角則不断增大。因为 q 和 z 經常在变化，所以方位角的变化速度也經常在变。根据(68′)式可以看出，等式右边的第二項在上中天时($A=0^\circ$)为正，在卯酉圈时($A=\pm 90^\circ$)等于零，在下中天时($A=180^\circ$)为負。因此，对于沒有大距的天体来說，它的方位角在上中天时变化最快，在下中天时变化最慢。

有大距的天体，即在天頂与天極間有上中天的天体，其 q 的变化如下：

在上中天时　$q=180^\circ$，
在大距时　$q=90^\circ$，
在下中天时　$q=0^\circ$。

因为从西大距到东大距，q 的变化为：

$$0^\circ<q<90^\circ,$$

故导数 $\frac{dA}{dt}$ [(68)式]为正，而方位角逐漸增大。

又因为从东大距到西大距，q 的变化为：

$$90^\circ<q<180^\circ,$$

故导数$\frac{dA}{dt}$为負，而方位角則逐漸減小。

对于有大距的天体来說，在上中天时，它的方位角变化速度同样也是最大的，因为此时 $\cos q=-1$，而 $\sin z$ 为最小。在下中天时的方位角变化速度比上中天时小，因为此时 z 为最大，而在这种情况下的 $\sin z$ 也較上中天时大。在大距时，方位角無变化，因为

$$\frac{dA}{dt}=0.$$

为了进行实际計算，在(68′)式中以有限改变量代替微分。此时(68′)式可写为：

$$\Delta A=15\left(\sin\varphi+\cos\varphi\frac{\cos A}{\operatorname{tg} z}\right)\Delta t,$$

或

$$\Delta A=15\left(\sin\varphi+\cos\varphi\frac{\cos A}{\operatorname{tg} z}\right)\Delta s. \tag{69}$$

对于卯酉圈来說，$\cos A=0$，故(69)式可改写为：

$$\Delta A=15\sin\varphi\,\Delta t,$$

或

$$\Delta A=15\sin\varphi\,\Delta s. \tag{70}$$

这里引用系数 15 的根据与在天頂距变化的場合中相同。

(70)式說明，对某一观测地而言，在卯酉圈上一切星的方位角变化速度相同，且仅依地理緯度为轉移。

假定在(69)式和(70)式中

$$\Delta t=\Delta s=1^m,$$

則可求得任一方位角 $\Delta A'$：

$$\Delta A'=15'\left(\sin\varphi+\cos\varphi\frac{\cos A}{\operatorname{tg} z}\right), \tag{69'}$$

和卯酉圈的 $\Delta A'$：

$$\Delta A'=15'\sin\varphi. \tag{70'}$$

公式(69′)和(70′)可以計算方位角在一分鐘內的变化 $\Delta A'$，同时所得 $\Delta A'$ 是以度分表示的。例如，就莫斯科的緯度（$\varphi=55°45'.6$），来說卯酉圈上方位角在一分鐘內的变化为 12′.4。

§27. 周日星表的一般概念・北極星星表

所謂星表，通常就是按等时間間距載出天体的某些坐标值的表。在实用天文学中，周日星表起着重要的作用。这些星表多半是每隔一整日或大半日，按相間 10 分鐘的若干个时刻，載出一个

或几个天体的方位角和天頂距値，因此称其为周日星表。实际天文工作者在野外工作时就需要这种星表，以便按照观测时刻从星表中查出已算好的天頂距和方位角来安置仪器上的水平度盤和垂直度盤，从而可迅速而有把握地找到所要观测的天体。因此，这种星表通常又称为作業星表。因为在野外天文测量中所用仪器的視場一般为 1°—2°，故为了根据作業星表只是为了来“捕捉”(这是天文員所常說的話)，星星，那么就只要近似地算出精度为 1′—2′的天体坐标就行了。因此，这种星表又常称为近似星表。

对我們来說最有用的是北極星的周日作業近似星表，因为我們經常需要观测北極星。通过对北極星的观测，可以决定观测地的近似緯度和精确緯度，可以决定对某一地面目标的近似方位角和精确方位角；关于这些問題將在实用天文学中詳加叙述。

此外，根据北極星星表可以进行仪器的定向（即所謂“置于子午圈內”）；由于定向，当水平度盤上的讀数等于天体的方位角时，仪器望远鏡的照准軸便位于該天体的垂直圈面內，即按方位角照准了。

为了推导計算北極星星表的近似公式，我們作出北極星的定位三角形 $PZ\sigma$（圖 48）。

北極星的坐标 α 和 δ 可由“天文年历”中查得。例如在“1953年的苏联天文年历”中（148 頁）便可找出北極星的 α 和 δ：

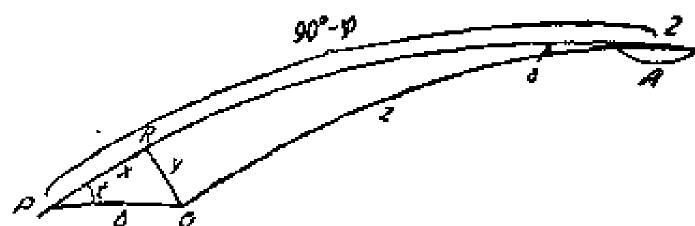


圖 48.

$$\alpha = 1^h\,51^m;\quad \delta = +89°3'.$$

此外，因为星表是就一定的地点来計算的，所以該地的緯度 φ 同样是应該知道的，那怕是近似的也好。最后，我們在星表計算中

定出一些等間距的恒星时刻 $s_1, s_2, s_3 \cdots\cdots$ 时，应根据实际需要使得每一个别場合中的恒星时 s 也是已知的。因此，在定位三角形 $PZ\sigma$ 中有兩边和一角为已知：

$$PZ = 90^\circ - \varphi,$$
$$P\sigma = 90^\circ - \delta = \Delta = 90^\circ - 89^\circ 3' = 57' (1953\text{年}), \tag{71}$$
$$\angle ZP\sigma = t = s - \alpha.$$

所求量为：

$$Z\sigma = z,$$
$$\angle PZ\sigma = a = 180^\circ - A. \tag{72}$$

为了簡化三角形 $PZ\sigma$ 的解算，因边 $P\sigma = \Delta$ 很小，可將三角形 $PZ\sigma$ 分成兩个直角三角形；为此，从頂点 σ 向 PZ 边作一球面垂綫 σR，即从天体向子午圈作一球面垂綫。首先我們来解小的球面直角三角形 $PR\sigma$，并將其兩直角边分别表示为：

$$PR = x; \quad R\sigma = y.$$

在此三角形中，斜边 $P\sigma = \Delta$ 和 $\angle ZP\sigma = t$ 是已知的。

因为此三角形的斜边 $\Delta = 57'$ 是小于 1° 的微量，故此三角形的各边弯曲很小，因而在推导近似公式时，可視其为一平面直角三角形而解算之（圖49）。

因此我們可得：

$$x = \Delta \cos t; \quad y = \Delta \sin t. \tag{73}$$

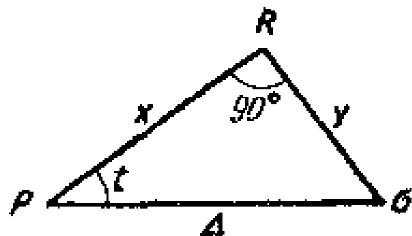


圖 49.

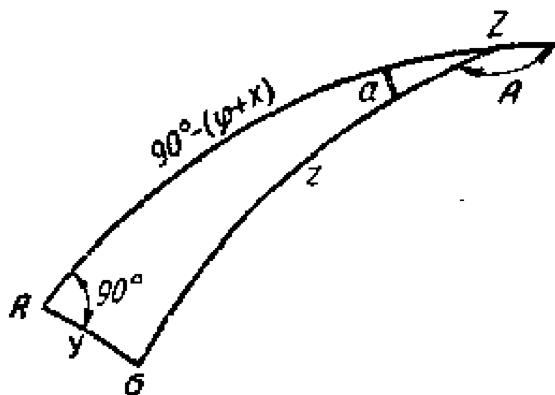


圖 50.

茲取直角在 R 点的三角形 $RZ\sigma$（圖 50）。在此三角形內，我

們可根据(73)式視直角边为已知边，即:

$$RZ=90^\circ-\varphi-x=90^\circ-(\varphi+x),$$

$$R\sigma=y.$$

直角边 y 与 Δ 为同級微量；这从(73)式的第二式中是显而易見的。由球面三角知道，球面直角三角形的直角边及其对角始終是同級微量。因此，$\angle RZ\sigma=a$ 也与 y 或 Δ 是同級微量。

按納白尔-莫裴規則有:

$$\cos(\varphi+x)=\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} y,$$

由此得:

$$\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} y \sec(\varphi+x),$$

或因 a 和 y 是微量，故

$$a=y\sec(\varphi+x).$$

根据(73)式將 y 値代入上式，最后便得:

$$a=\Delta\sin t\sec(\varphi+x). \tag{74}$$

在

$$\sec(\varphi+x)\neq\infty$$

的条件下，(74)式可証实上述关于 a 角微小的結論。

我們可以計算出，中緯度上的 a 角最大达到 2°—$2^\circ.5$。其次根据納白尔-莫裴規則得:

$$\cos a=\operatorname{ctg} z \operatorname{tg}[90^\circ-(\varphi+x)].$$

因 a 角很小，令 $\cos a=1$，則得:

$$\operatorname{tg} z=\operatorname{tg}[90^\circ-(\varphi+x)].$$

如弧 z 及 $90^\circ-(\varphi+x)$ 处于第一象限，由此則有

$$z=90^\circ-(\varphi+x)$$

或

$$z=(90^\circ-\varphi)-x \tag{75}$$

式中 x 可由(73)式之第一式求出。

根据(74)式求出 a 之后，便很容易按公式

$$A=180^\circ-a \tag{76}$$

算出 A 值。上式由(72)式得来。(71)式—(76)式为計算北極星近似星表的实用公式。

如果我們使用每年載于天文年历中的專門表“北極星的地平緯度和方位角表”(例如參閱“1953 年的苏联天文年历”第 411 頁至 413 頁),則星表的計算还可大大地簡化。在这些表內載有兩种量:一为以字母 f 表示的量 x,它以恒星时 s 为引数,自上中天开始于 24 小时內每隔 20 分載一值;二为量 a,此量以同样的恒星时刻为引数,并就 35°—84° 間之緯度值計算,其中对 35°—60° 之間的緯度每隔 5° 一載,对 60°—74° 之間的緯度每隔 2° 一載,对 74°—80° 之間的緯度每隔 1° 一載,而对 80°—84° 之間的緯度則每隔 30′ 一載。

这种用表須每年重算(參閱 § 63 和 § 64)。

应該指出,由于北極星的周日运动对子午圈来說是对称的,故对 x 和 a 的每一表列值,可于表內列載左右兩个引数值。左边的引数自上而下由 $1^h 51^m$—$13^h 51^m$,即从上中天瞬間到下中天瞬間;右边的引数自下而上由 $13^h 51^m$—$1^h 51^m$,即从下中天瞬間到上中天瞬間。x 和 a 之各值可根据引数 s 由表內插而得,并且对 x 来說,引数在左或在右都一样。在应用(76)式时,若取用左边的 s,則 a 值应視为正,若取用右边的 s,則 a 值应視为負。这个規則的产生是由于从上中天瞬間 ($1^h 51^m$) 至下中天瞬間 ($13^h 51^m$) 北極星位于天球的西半部,而从下中天至第二次上中天北極星位于天球的东半部。但是如果始終將 a 看作正值,而其符号的变化在公式中加以表示,那就更会方便,即設:

$$A = 180° \mp a \begin{cases} \text{W} & \text{(北極星在西半部)}, \\ \text{E} & \text{(北極星在东半部)}。 \end{cases} \tag{77}$$

此外,a 值应首先根据緯度进行內插。当 x 和 a 內插以后,(对此宜編制一專門輔助用表) z 和 A 可根据(75)和(77)式計算,即

$$z=(90^\circ-\varphi)-x,$$

$$A=180^\circ\mp a\begin{cases}W\\E\end{cases}.$$

例

試根据“1953年的苏联天文年历”中的用表，就地方恒星时16^h31^m—18^h31^m間每隔10^m計算基輔($\varphi=50^\circ27'.2$)的北極星的近似作業(周日)星表。

因为計算精度只要达到整分就够了，故在計算时我們取

$$\varphi=50^\circ27';\quad 90^\circ-\varphi=39^\circ33'.$$

为了保証同样的精度，当按表内插a的时候，取$\varphi=50^\circ.5$已够。

因为在表内的这一部分上，緯度的表間距等于5°，故内插a时的内插因子为:

$$\frac{0^\circ.5}{5^\circ}=0.1.$$

茲就$\varphi=50^\circ27'$，制一輔助用表。

于此，首先就我們所需要的表列时刻(即自16^h31^m开始，每隔20^m記一个)由表录出相应的x值，并就同样的时刻按緯度内插出a值，隔列填于輔助表内；然后在所录出的表列値間的中央进行内插，而填入起先所空的那些列内。这样就得到每隔10^m的x值和a值。

輔助用表($\varphi=50^\circ27'$)

s		x		a	
16^h	31^m	-0°	$44'$	1°	$4'$
			42		*7*
	51	−0	40	1	10
			38		*13*
17	11	−0	37	1	16
			34		*18*
	31	−0	32	1	21
			30		*24*
	51	−0	28	1	26
			26		*28*
18	11	−0	24	1	30
			22		*32*
	31	−0	19	1	34

北極星星表

s		z		A	
16^h	31^m	40°	$17'$	181°	$4'$
	41		15		7
	51		13		10
17	1		11		13
	11		10		16
	21		7		18
	31		5		21
	41		3		24
	51		1		26
18	1	39	59		28
	11		57		30
	21		55		32
18^h	31^m	39°	$52'$	181°	$34'$

现在，我們根据(75)式和(77)式計算北極星星表，并在(77)式中取"正"号(+)，因为已知时刻都在 $13^h\,51^m$ 和 $1^h\,51^m$ 之間，即引数位于"天文年历"中北極星表的最右一欄中，因此北極星位于天球的东半部。

§28. 第三种坐标系与第四种坐标系(赤道系与黃道系)間的关系

有时知道了某一天体 σ 的赤道坐标 α 和 δ，还需求出它的黃道坐标 β 和 λ。为了获得对解决这一問題所必需的公式，我們在同一圖上(圖 51)作出兩个坐标系：即赤道系和黃道系。圖中 $Q'Q$ 为赤道，$k'k$ 为黃道，P 为北極，p 为黃道北極，♈ 为春分点。过該天体 σ 作一赤經圈 $P\sigma M$ 和黃經圈 $p\sigma R$。此时得：

$$M\sigma=\delta;\qquad R\sigma=\beta.$$

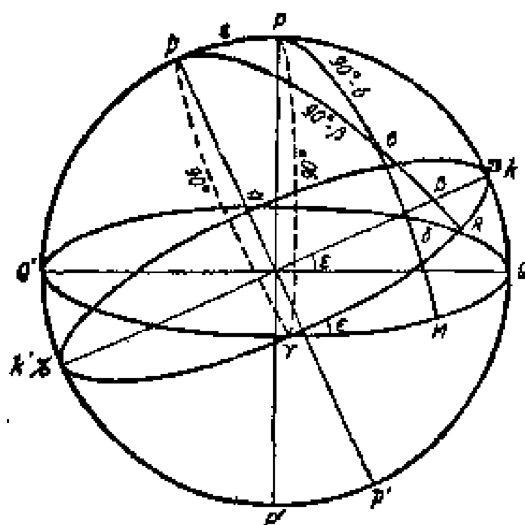


圖 51.

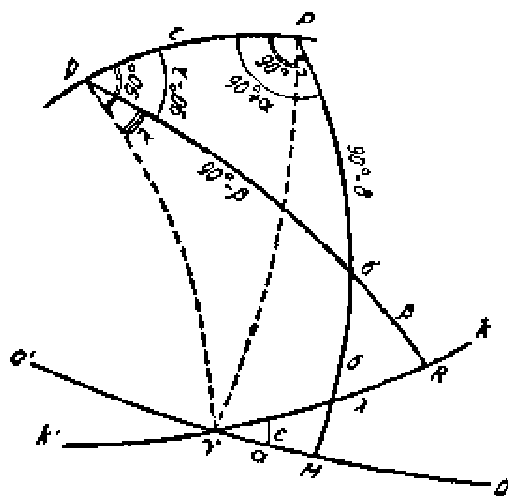


圖 52.

在此我們就得一球面三角形 $pP\sigma$，它的頂点分别为北極 P、黃極 p 和天体 σ。有时称此球面三角形为天体的極三角形，且在某种程度上与定位三角形相似。此三角形的边分别为赤經圈 $P\sigma M$，黃經圈 $p\sigma R$ 以及通过北極和黃極的大圓 $pPkQ\ p'P'k'Q'p$。此大圓称为二至圈，因为它通过点 k 和 k'，即夏至点 ♋ 和冬至点 ♑。这一三角形以較大的比例尺繪于圖 52 上。現在我們来看此三角形

的边和角等于多少。根据圖 51 和圖 52 很容易証明它的边：

$$P\sigma = 90^\circ - \delta,$$
$$p\sigma = 90^\circ - \beta, \qquad (78)$$
$$pP = \varepsilon.$$

为了确定此三角形在点 p 和 P 上的角等于多少，我們首先以大圓弧將 P 和 p 与春分点 Υ 相联。因为春分点旣位于黄道上又位于赤道上，故

$$\smile \Upsilon P = 90^\circ, \quad \smile \Upsilon p = 90^\circ.$$

因而，春分点为大圓 $pPkQp'P'k'Q'p$ 的几何極。因此，我們可就此个别情形来驗証球面几何的公理：若大圓通过其他兩大圓之極，則这兩大圓之交点就是該大圓的几何極。記住这一公理是很有用的，因为在球面天文学和实用天文学中經常要用到它。

因此，旣然春分点 Υ 是大圓 pP 的几何極，故

$$\smile \Upsilon P \perp \smile pP, \quad \smile \Upsilon p \perp \smile pP;$$

卽弧 $P\Upsilon$ 和 $p\Upsilon$ 乃是 pP 弧的球面垂綫。

根据圖 52，我們可直接看出定位三角形各角的关系：

$$\angle pP\sigma = \angle pP\Upsilon + \angle \Upsilon P\sigma,$$

但是因为　$\angle pP\Upsilon = 90^\circ, \quad \angle \Upsilon P\sigma = \alpha;$

故　$$\angle pP\sigma = 90^\circ + \alpha. \qquad (79)$$

其次，　$\angle Pp\sigma = \angle Pp\Upsilon - \angle \sigma p\Upsilon,$

又因　$\angle Pp\Upsilon = 90^\circ$ 和 $\angle \sigma p\Upsilon = \lambda,$

故　$$\angle Pp\sigma = 90^\circ - \lambda. \qquad (80)$$

設天体的赤道坐标 α 和 δ 和黄赤交角 ε 为已知，而要求确定其黄道坐标 β 和 λ。应用天文公式組[1] 于三角形 $Pp\sigma$ 之未知边 $P\sigma$ 和未知角 $Pp\sigma$，并利用(78)、(79)、(80)三式，便可写出：

---

[1] 通常把下面三个公式的綜合叫做天文公式組：卽边的余弦公式，边与鄰角的正弦乘积公式以及边的正弦与其鄰角的余弦乘积公式；試与(24)－(26)三式比較。

$$\cos(90^\circ-\beta)=$$
$$=\cos\varepsilon\cos(90^\circ-\delta)+\sin\varepsilon\sin(90^\circ-\delta)\cos(90^\circ+\alpha),$$
$$\sin(90^\circ-\beta)\sin(90^\circ-\lambda)=\sin(90^\circ-\delta)\sin(90^\circ+\alpha),$$
$$\sin(90^\circ-\beta)\cos(90^\circ-\lambda)=$$
$$=\cos(90^\circ-\delta)\sin\varepsilon-\sin(90^\circ-\delta)\cos\varepsilon\cos(90^\circ+\alpha),$$

或

$$\begin{aligned}\sin\beta&=\cos\varepsilon\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,\\ \cos\beta\cos\lambda&=\cos\delta\cos\alpha,\\ \cos\beta\sin\lambda&=\sin\delta\sin\varepsilon+\cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha.\end{aligned}\tag{81}$$

这就是解决这一問題的公式。根据(81)式中之第一式可算出天体的黄緯 β；黄緯旣为已知，則可根据其他二式中的一个求得天体的黄經 λ。第三式可供檢核用。如果需要或者希望按正切求出未知数値，則可將(81)式改化，这种改化和化赤道坐标为地平坐标的公式(24式—26式)相同。

反之，如果已知 β 和 λ，而要求算出 α 和 δ，則由三角形 $pP\sigma$ 依同样的程序可求得下列一組公式：

$$\begin{aligned}\sin\delta&=\sin\beta\cos\varepsilon+\cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda,\\ \cos\delta\cos\alpha&=\cos\beta\cos\lambda,\\ -\cos\delta\sin\alpha&=\sin\beta\sin\varepsilon-\cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda.\end{aligned}\tag{82}$$

关于(82)式的一切，可將以前对于(81)式的叙述略加变动地重复一遍卽可。

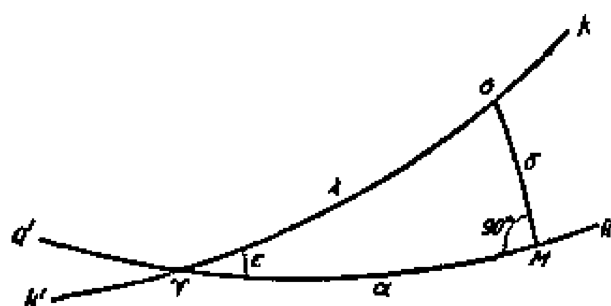


圖 53.

天体正好位于黄道的这一情况引起我們特别的关心，例如太陽(見圖53)。由 σ 点向赤道 $Q'Q$ 作一球面垂綫 σM，便可得一直角在 M 点处的球面三角形 $\Upsilon\sigma M$，赤道 $Q'Q$、黄道 $k'k$ 和天体 σ 的赤經圈 σM 弧为此三角形的边。由圖 53 可知此三角形的边具有

如下之值:

$$\Upsilon\sigma=\lambda,\quad \Upsilon M=\alpha,$$

$$M\sigma=\delta. \tag{83}$$

此外，

$$\angle M\Upsilon\sigma=\varepsilon. \tag{83'}$$

設已知 λ 和 ε, 求天体的 α 和 δ。此时，上述直角球面三角形 $\Upsilon M\sigma$ 可根据納白尔-莫裴規則解算之,得:

$$\begin{aligned}\sin\delta&=\sin\lambda\sin\varepsilon,\\ \operatorname{tg}\alpha&=\operatorname{tg}\lambda\cos\varepsilon.\end{aligned} \tag{84}$$

为了檢核,我們可用同样的方法求得下面的公式:

$$\cos\lambda=\cos\delta\cos\alpha. \tag{85}$$

例

1953 年 6 月 7 日太陽的黃經 $\lambda_\odot$ 为 75°56′.5，黃赤交角 ε 为 23°26′.7。試求太陽的赤道坐标 $\alpha_\odot$ 和 $\delta_\odot$。

解算根据(84)式按如下格式进行。

用計算机計算

$\lambda_\odot$	75°56′.5
ε	23 26 .7
$\sin\lambda_\odot$	0.97 01
$\sin\varepsilon$	0.39 78
$\sin\delta_\odot$	0.38 59
$\delta_\odot$	22°41′.9
$\operatorname{tg}\lambda_\odot$	3.99 36
$\cos\varepsilon$	0.91 75
$\operatorname{tg}\alpha_\odot$	3.66 41
$\alpha_\odot$	74°44′.2
$\alpha_\odot$	$4^h58^m57^s$

檢核

$\cos\lambda_\odot$	0.24 29
$\cos\delta_\odot$	0.92 26
$\cos\alpha_\odot$	0.26 32
$\cos\delta_\odot\cos\alpha_\odot$	0.24 28

用对数表計算

$\lambda_{\odot}$	75°56′.5
ε	23 26 .7
lg sin $\lambda_{\odot}$	9.98 68
lg sin ε	9.59 97
lg sin $\delta_{\odot}$	9.58 65
$\delta_{\odot}$	22°42′.0
lg tg $\lambda_{\odot}$	0.60 14
lg cos ε	9.96 26
lg tg $\alpha_{\odot}$	0.56 40
$\alpha_{\odot}$	$4^h58^m55^s$

檢核

lg cos $\lambda_{\odot}$	9.38 54
lg cos $\delta_{\odot}$	9.96 50
lg cos $\alpha_{\odot}$	9.42 06
lg cos $\delta_{\odot}$ cos $\alpha_{\odot}$	9.38 56

分別湊整至 1′ 和 $0^m.1$，則兩种計算法都得：

$$\delta_{\odot}=+22°42', \quad \alpha_{\odot}=4^h58^m.9.$$

計算的檢核是令人滿意的。計算所用的表与在前面各例中所用的表同。

第四章　各种測量时間的系統及其彼此間的关系·天文年历

§29. 太陽的視周年运动

測量时間在天文学中是很重要的，尤其是在实用天文学中更是重要。我們已經知道，在天文学中是采用恒星日——春分点在該地子午圈上接續兩次上中天的时間間隔——作为測量时間的基本單位。恒星日較依据晝夜交替即按太陽視周日运动来决定的普通日为短。显然，在日常生活中是根据太陽定时来作为測量时間的基础的，而恒星日与太陽日長短的差异，乃是由于太陽因其視周年运动对恒星及春分点移动的結果。由此可得出結論：为了要更詳細地和更正确地了解測量时間的問題，首先必須較詳細地研究一下太陽的視周年运动。

太陽的視周年运动是地球繞太陽周年运轉的結果，这也可以說是太陽在天球上的視反映。因而，恒星日与太陽日長短的差异就是地球繞太陽轉动的結果。根据克普勒定律，我們知道，地球是繞着我們的中央天体循橢圓运动的，而太陽位于此橢圓的一个焦点上。这种运动是不均匀的。地球靠太陽愈近，运行愈快；距太陽愈远，运行愈慢。当地球位于軌道上靠太陽最近的一点，即在所謂近日点（从希臘字 περι′(近)和 ἥλιος (太陽)而来)时，地球的运行速度最大；而当位于距太陽最远的一点即在所謂远日点时，运行速度最小。根据克普勒第二定律，地球在軌道上的运行速度是不断地变化的。

橢圓（地球軌道）平面叫做黃道面。我們知道，黃道面与天球

相交的大圈叫做黄道。因此，地球中心和太陽中心总是在黄道面上，由此可見，太陽中心永远是由地球中心投視在天球黄道上的点。这就是說，在太陽的視周年运动中，太陽的視面中心無論什么时候都是循黄道移动的。簡單地說，黄道是太陽在天球上作周年运动时所經过的視軌迹①。用直接观測的方法就可足以明显地証明太陽的周年运动也是不均匀的。当地球与太陽的距离最小的那一瞬間，太陽所在的天球上的点叫做近地点[从希臘字 $\pi\varepsilon\rho\iota'$ (近)和 $\gamma\tilde{\eta}$(地球)而来]；而与这一点恰恰相对的天球上的点叫做远地点[$\alpha\pi o'$(远)]。根据这些术語，我們可以說，在近地点太陽循黄道的視移动为最大，而在远地点則为最小。其速度是逐漸不断地变化着的，而且直接取决于地球在其軌道上的运行速度的变化。

現在我們来研究太陽的坐标变化，并且首先研究它的黄道坐标，黄經和黄緯的变化。但要附帶說明一下，在球面天文学中所說的"太陽坐标"，就是指太陽視面中心的某球面坐标而言。同时在此，我們只是近似地研究有关太陽的坐标問題。在这样的情况下，我們可以說太陽的黄緯常等于零，即：

$$\beta_{\odot}=0^{\circ}.$$

其实太陽的黄緯不等于零，有时与零之差的絕对値达到 1″，甚至更大一些②。發生这种現象的主要原因，乃在于按克普勒定律和牛頓定律繞太陽运动的，严格說来不是地球中心，而是月-地系的重心，此重心位于地球体內，其距地心約为地球半徑的四分之三。地球及月亮繞此重心逐月旋轉着。地心对月-地系重心运动的軌道面和月亮的軌道面重合，此一地心軌道面和月亮軌道面一样对黄道面傾斜 5°9′。因此，更正确地說，黄道是由月-地系重

① 严格說来，太陽的視軌迹是一条非常复杂的曲綫，但它与黄道相差很小。

② 参閱"1953 年的苏联天文年历"7—21 各奇数頁。

心繞太陽的周年运动所确定。

因为太陽的視周年运动方向与天体的周日运动方向相反，故太陽的黃經不断地由在春分时的 0° 一直增加到 360°；但其增加的速度并不一律：在近地点黃經增加得最快，在远地点則增加得最慢。在近地点时，太陽黃經每日增加約达 61′；而在远地点时，則仅增加 57′。太陽約于一月一日在近地点，七月初在远地点。例如在 1953 年，一月二日在近地点，七月五日在远地点。秋冬兩季 179 天，而春夏兩季 186 天，即多 7 天，这便是太陽运动不均匀的結果。

太陽的赤道坐标 $\alpha_{\odot}$ 和 $\delta_{\odot}$ 同样也是在不断地变化着，且其变化的規律比起黃道坐标更为复杂。

3 月 21 日，在春分那一瞬間，$\alpha_{\odot}$ 及 $\delta_{\odot}$ 等于零(圖 54)。

太陽的赤經始終是增加的，而且是不均匀地增加的。太陽的赤緯从 3 月 21 日至 6 月 22 日由 0° 增加至 $+23\frac{1}{2}^{\circ}$，因为 KQ 弧是以球面角 $K\gamma Q=23\frac{1}{2}^{\circ}$ 量度的。此球面角称为黃赤交角，并以字母 ε 表示。在 K 点太陽的赤緯具有最大値；此时我們覚得太陽在赤緯方面的运动似乎停止了，所以称 K 点为夏至点，称 6 月 22 日为夏至日。夏至以后，太陽的赤緯开始慢慢地減小，尔后越来越快。

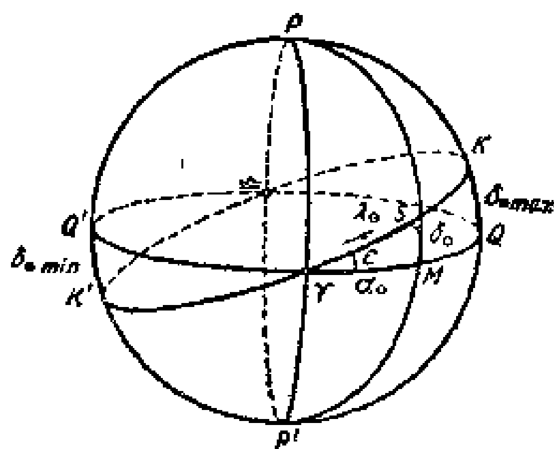


圖 54.

在 9 月 23 日秋分那一天，太陽的赤緯重新为零。但太陽的赤緯仍繼續減小，一直到 12 月 22 日当其为 $-23\frac{1}{2}^{\circ}$ 为止，此时太陽位于 K' 点。这就是太陽赤緯的最小値。根据类似的理由称此点

为冬至点，称 12 月 22 日为冬至日。冬至以后，太陽的赤緯开始逐漸增加，但仍旧为負值，即它的絕对值一直減小到 3 月 21 日又为零止。其次，正如我們所知道的那样，太陽赤緯的增加一直要繼續到 6 月 22 日，全部的景象周期性地逐年重复着。因此，太陽的赤緯是从 $-23\frac{1}{2}^\circ$ 变到 $+23\frac{1}{2}^\circ$ 的；从冬至到夏至太陽的赤緯逐漸增加，而从夏至到冬至則逐漸減小。

茲將太陽坐标变化的研究結果列成下表。

日　期	名　　称	符号	黃道坐标		赤道坐标	
			$\lambda_\odot$	$\beta_\odot$	$\alpha_\odot$	$\delta_\odot$
3 月 21 日	春分日…………	♈	0	0°	0^h	0°
6 月 22 日	夏至日…………	♋	90	0	6	$+23\frac{1}{2}^\circ$
9 月 23 日	秋分日…………	♎	180	0	12	0
12 月 22 日	冬至日…………	♑	270	0	18	$-23\frac{1}{2}^\circ$
3 月 21 日	春分日…………	♈	360	0	24	0

如果我們在上表中注意到，从春分到夏至要經过 93 天，从夏至到秋分要經过 93 天，从秋分到冬至要經过 90 天，从冬至到春分要經过 89 天，那末就可發現 $\lambda_\odot$ 和 $\alpha_\odot$ 变化的不均匀性。

如上所述，春夏兩季共長 186 天，而秋冬兩季共長 179 天。

§30. 按太陽測量时間的系統·真太陽日·真太陽时

若要建立一个按太陽来測量时間的系統，則首先应該选擇太陽，或者更正确的說，选擇太陽的中心作为我們計算地球自轉的点。于此，我們也要遵循在 §14 中所規定的条件，即在討論的时候要从我們直接看到的运动出發。太陽的視周日运动是与地球的自轉相应的，具有正圓形狀的太陽視面的几何中心是与太陽中心

相应的。当观测地的子午面在宇宙中确实通过太陽中心的那一瞬間，我們將直接看到太陽視面中心經过观測地的子午圈，卽看到太陽在这一子午圈上的上中天。要着重指出：太陽的視面中心是一确为我們所看到的質点。并非虛構的，也不是想象的。为了言述簡單起見，通常称此点为“眞”太陽。因而我們可以說，当观測地的子午面經过太陽中心的时候，我們便可看到“眞”太陽在該子午圈上的上中天。“眞”太陽在該地子午圈上上中天的时刻叫做該地的“眞”午正，下中天的时刻称为該地的“眞”子正。当地球对太陽中心自轉一整周后，我們在同一地面点上重新看到“眞”太陽在上中天；此时該地又是“眞”午正。因此，在按太陽来測量时間的系統中，我們采用接續兩次“眞”子正之間的时間間隔作为时間單位的。这种时間單位叫做“眞太陽日”。“眞”午正那一瞬間，卽“眞”太陽上中天的那一瞬間便是“眞”太陽日的开始。每一“眞”太陽日分为24个“眞”太陽小时，每一“眞”太陽小时分为60个“眞”太陽分，每一“眞”太陽分又分为60个“眞”太陽秒。按这一系統来測量时間所得的結果叫做“眞”时，或者更正确些叫做“眞”太陽时。被用于这些名称和术語中的形容詞“眞的”，含有某些特殊的假定意义，此种意义在前面已說到了一些，而在以后將会更加明白。

于是在按“眞”太陽来測量时間的系統中采用“眞”太陽日，卽采用接續兩次“眞”午正之間的时間間隔为时間單位，采用“眞”午正为起算点，也就是以“眞”午正作为一日的开始。按这一系統来測量时間的結果——“眞”时，可預先以任意字母表示，例如用字母 w 表示。

因为在每一“眞”太陽日內表現出的太陽視周年运动的不均匀性一般說来是很小的，所以我們可近似地認为“眞”太陽时角的增加是与时間成比例的。因此，若 w_1 和 w_2 为二任意“眞”太陽时刻，而 $t'_\odot$ 和 $t''_\odot$ 为与此相应的眞太陽的时角，則可写为：

$$t''_{\odot}-t'_{\odot}=k(w_2-w_1),$$

式中 k 为比例系数。因为在一"眞"太陽日即在24"眞"太陽小时内，"眞"太陽对某一子午圈轉了一整周360°，所以在此种情况下不难算出比例系数(參閱§14)为：

$$k=\frac{360^{\circ}}{24^{h}}=15.$$

因为在"眞"午正瞬間(眞太陽日的开始)，"眞"时 w_0 等于零，而"眞"太陽的时角也等于零(上中天)，故对于任何"眞"时 w 及其相应的"眞"太陽时角 $t_{\odot}$ 而言，可写为：

$$t_{\odot}=15w.$$

假定时角 $t_{\odot}$ 以度表示，則上式可改写为另一种形式：

$$w=\frac{1}{15}t_{\odot}.$$

此式用文字表达是：就一阶近似值来說可以認为地方"眞"时是与自該地子午圈起算的"眞"太陽时角成比例。

現將"眞"太陽的时角以时来表示，則上述兩式都可写为：

$$w=t_{\odot}.$$

因此，若所指的眞太陽时角是以时表示的話，則我們象在前面所說的那样，由比例性質可以近似地說，地方"眞"时在数值上与"眞"太陽时角 $t_{\odot}$ 相等，此"眞"太陽时角以时为單位表示，并且从当地的子午圈起算。有了这个数学等式，則对于"眞"时亦可采用表示"眞"太陽时角的同一符号 $t_{\odot}$ 来表示。并且我們今后將保持这一通用的表示法，而符号 w 則是由于系統性上的理由和为了叙述方便起見而暫时采用的。

§31. 平太陽日·平太陽时·时差及其在一年內的变化·民用时

因为太陽的視周日运动是由天球的周日旋轉以及太陽因本

身的周年运动在天球上的周日位移所形成，又因为太陽由于視周年运动的不均匀，在各日的周日位移是不同的，所以每一"真"太陽日的長短并不一致，而是終年都在变化着。其次尚有另一个原因，即黄道向赤道傾斜，促使真太陽日長短不一，这在下面可以得証。这样，真太陽日就不能滿足作为測量單位的要求，因为它不是一个常数。在古代当人們还沒有精确的計时器时，这种变化是無法感覚到的。但到了近代，当鐘表技术已达到一定的完善程度时，这种情况才显示出来。事实上，由直接观測發現的"真"太陽日的長度，其最長和最短之差是 50 秒，而日晷和优良的摆鐘所示的差异，逐漸积累可达 15 分左右。

总之，直接的精密的观測指明"真"太陽日是一变量。严格地說，太陽中心时角的变化是不均匀的，不与时間成比例的。因此，按"真"太陽来測量时間的系統是不完善的，所得的結果也是不精确的。

于是，有必要建立一个完善地按太陽来測量时間的系統，为此首先要引用这样的測量时間單位，它能滿足于作为測量單位的要求，即須为一常数。人們采用所謂**平太陽日**作为这样的測量时間的單位，平太陽日可近似地定义为：其長度等于一年內或以四为倍数的年份內的"真"太陽日的平均長度。

为了更深入的研究这一問題，为了建立完善的按太陽来測量时間的系統，首先必須詳細地研究"真"太陽时角变化的不均匀性。

为了这一目的，我們取已知的(11′)式：

$$t=s-\alpha,$$

并將其应用于"真"太陽：

$$t_{\odot}=s-\alpha_{\odot}. \tag{86}$$

式中帶有足符⊙的数値表示属于真太陽的。

为了研究"真"太陽时角的变化，微分(86)式得：

$$dt_{\odot} = ds - d\alpha_{\odot}. \tag{87}$$

因为 s 在数値上等于 t_{Υ}，而春分点♈的时角是均匀地增長的，故应將微分 ds 視为常数。因而，我們应該研究的是在(87)式右端的另一个微分 $d\alpha_{\odot}$。若此微分是一个常数，则微分 $dt_{\odot}$ 也是一个常数；在相反的情况下，分析 $d\alpha_{\odot}$ 的微分式便能查明 $dt_{\odot}$ 不固定的原因，从而也能查明"真"太陽时角变化不均匀的原因。

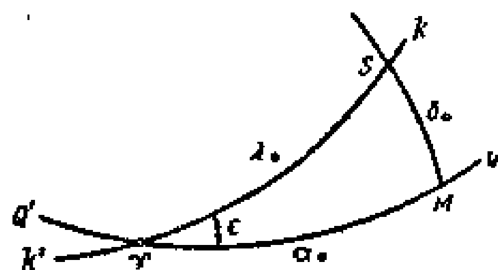


圖　55.

为了这个目的，我們来研究一下球面三角形♈MS（見圖 54）；此三角形中的♈S 边为黄道弧，♈M 边为赤道弧，而 SM 边为太陽的赤經圈弧，太陽仍假定位于 S 点。將这个三角形用大比例尺單独地繪于圖 55 上。在此三角形中：

$$\Upsilon S = \lambda_{\odot};\quad \Upsilon M = \alpha_{\odot};\quad SM = \delta_{\odot},$$
$$\angle S\Upsilon M = \varepsilon.$$

按納白尔-莫裘規則可写为：

$$\cos\varepsilon = \operatorname{ctg}\lambda_{\odot}\operatorname{tg}\alpha_{\odot}$$

由此得

$$\operatorname{tg}\alpha_{\odot} = \operatorname{tg}\lambda_{\odot}\cos\varepsilon, \tag{88}$$

式中 ε 为黄赤交角，由于黄赤交角的变化是極其緩慢、而且是微小的周期性的長期变化，故可將其視为一約等于 23°26′.7(1953)的常数値。

以 $\alpha_{\odot}$ 和 $\lambda_{\odot}$ 为变量微分(88)式，得：

$$\frac{d\alpha_{\odot}}{\cos^2\alpha_{\odot}} = \frac{d\lambda_{\odot}}{\cos^2\lambda_{\odot}}\cos\varepsilon. \tag{89}$$

三角形♈MS 中尚有下述关系式：

$$\cos\lambda_{\odot} = \cos\alpha_{\odot}\cos\delta_{\odot}. \tag{90}$$

以(90)式的右边代(89)式右边分数的分母 $\cos\lambda_{\odot}$，將所得公式的兩边除上 $\frac{1}{\cos^2\alpha_{\odot}}$，最后得:

$$d\alpha_{\odot}=d\lambda_{\odot}\sec^2\delta_{\odot}\cos\varepsilon. \qquad (91)$$

上式右端含有三个因子: $d\lambda_{\odot}$, $\sec^2\delta_{\odot}$ 和 $\cos\varepsilon$; 其中最后的一个卽 $\cos\varepsilon$, 根据上述的假定可以將其視为一常量。但是前面已研究过(参閱 §29), $\lambda_{\odot}$ 是不均匀地变化的，所以微分 $d\lambda_{\odot}$ 为一变量。第二个因子 $\sec^2\delta_{\odot}$ 也是一个变量; 因为在 §29 中我們已經看到 $\delta_{\odot}$ 是在 $-23\frac{1}{2}^{\circ}$ 到 $+23\frac{1}{2}^{\circ}$ 的范圍內不断地变化的，所以它是时而增加时而减少的。很明显，这些变量因子旣然彼此不成反比，則其乘积同样不可能为常量。

这就是說: 微分 $d\alpha_{\odot}$ 为一变量，因而微分 $dt_{\odot}$ 也为一变量; 故由数学上得出結論:"眞"太陽时角的变化不均匀，"眞"太陽日的長度不为常量。这样一来，直接观測和理論上的研究得出相同的結論而彼此驗証。

这一分析便使我們能够查明上述現象的原因。这种原因显然有二: 第一个原因是因子 $d\lambda_{\odot}$ 的不固定，此卽**太陽循黃道的視周年运动的不均匀性**; 第二个原因是因子 $\sec^2\delta_{\odot}$ 的不固定，也就是太陽赤緯的变化，因此，第二个原因乃出自太陽**不徼赤道而循黃道运行的这一事实**。

为了求得这样的一点(那怕是假想的也行)，根据它可以計算地球的轉动，并且要与"眞"太陽有一定的联系，并且它的运动是沒有"眞"太陽运动的那些特点，为此則要采用下述虛構的运动体系。

設想有一点，它以太陽运行的平均速度循黃道均匀地运行着。这一假設点叫做**黃道平太陽**。黃道平太陽与**实际的**或称它为"眞"太陽是有关联的，它和"眞"太陽在同样的期限內，即在一年內繞行一整周，并与眞太陽同时經过**近地点**和**远地点**。黃道平太陽在

循黃道的运行中，时而越过"眞"太陽，时而落后于"眞"太陽。事实上，因为"眞"太陽接近近地点时，其运行速度較黃道平太陽的速度大，所以"眞"太陽經过近地点后越过黃道平太陽，这就是說它走在前面了。但因"眞"太陽的速度逐漸減小，所以黃道平太陽慢慢地开始追"眞"太陽，而在远地点赶上了它。过远地点后則相反，"眞"太陽由于运行較慢而落后于黃道平太陽。但因其运行速度增加又开始追黃道平太陽，一到近地点，它又重新赶上了黃道平太陽。就黃道平太陽的这一运行的特性而論，也表明了黃道平太陽的黃經等于眞太陽的平黃經，即

$$\lambda_{黃道平\odot}=(\lambda_{\odot})_{平}。\tag{92}$$

其次，設想另有一点，它均勻地循着赤道运行，称此假想的第二个点为赤道平太陽。

赤道平太陽通常簡称为平太陽。赤道平太陽和黃道平太陽是互相关联的：赤道平太陽也在一年內沿赤道繞行一整周，即它以黃道平太陽沿黃道运行的同样速度循赤道移动。赤道平太陽和黃道平太陽在春分点和秋分点相遇。因此，赤道平太陽的赤經等于黃道平太陽的黃經，或归結为等于"眞"太陽的平黃經，即：

$$\alpha_{赤平\odot}=\lambda_{黃平\odot}=(\lambda_{\odot})_{平}。\tag{93}$$

太陽的眞黃經和它的平黃經間的关系，是根据理論天文学和天体力学中的公式建立起来了，因此眞太陽和赤道平太陽的相互位置总是可以用計算的方法来确定的。

赤道平太陽对于測量时間来說是非常方便的，因为它是沿赤道作均勻地运行，从而它的时角也就成为均勻地变化。

于是，我們可采用赤道平太陽来計算地球的轉动。按假設，赤道平太陽的視周年运动是均勻的，时角的增加是与时間成比例的。同时，我們將根据前述的条件(参閱 § 14 和 § 30)，从視运动

出發，也就是說，我們將"观測"赤道平太陽的視周日运动，并計算它在該地子午圈上的接續的兩次上中天。在这一計算时間的系統中，我們采用前面已經說过的平太陽日作为測量單位；平太陽日可定义为赤道平太陽在該地子午圈上接續兩次上中天之間的时間間隔。赤道平太陽在該地子午圈上上中天的瞬間叫做該地的平午正。因而可以簡單地說，任一地点接續兩次平午正之間的时間間隔叫做一平太陽日。

按这一系統測量时間，其結果叫做地方平时，并以字母m表示。

于是，在按平太陽測量时間的系統內，采用平太陽日作为單位；而以地方平午正作为起算点，即作为地方平太陽日的开始。一平太陽日分为24个平太陽小时，一平太陽小时分为60平太陽分，一平太陽分又分为60平太陽秒。

比較一下本节的和前节的术語即可看出，形容詞"眞的"与形容詞"平的"是互相对应的。定語"眞的"的假定意义就在于此，它含有純粹專門的、技术上的意义，而不含有生活上的、哲学上的意义。

赤道平太陽的时角与时間成比例地均匀地增加，这是从我們前面的整个討論中所得出的結論。直接由(91)式亦可导出同样的結論。事实上，因为赤道平太陽沿赤道均匀地运行，因而对赤道平太陽而言則有：

$$d\lambda_{赤平\odot}=\text{常数},\quad \sec^2\delta_{赤平\odot}=1;$$

所以
$$d\alpha_{赤平\odot}=\text{常数},$$

由(87)式：
$$dt_{赤平\odot}=\text{常数}。$$

赤道平太陽的时角与平太陽时的比例式可写为：

$$t_{赤平\odot}=km,$$

式中 $t_{赤平\odot}$ 以度表示。

因为在一平太陽日内，即在24个平太陽小时内，平太陽对該地子午圈旋轉了360°，故比例系数 k 之值与前同，即:

$$k=\frac{360^\circ}{24^h}=15.$$

因而前式可写为:

$$t_{赤平\odot}=15\,m,$$

或

$$m=\frac{1}{15}t_{赤平\odot}.$$

若赤道平太陽的时角以角时表示，則 k 等于1，而最后二式可改写为:

$$m=t_{赤平\odot},\tag{94}$$

即地方平太陽时在数值上等于由該地子午圈起算的以时表示的赤道平太陽的时角。

利用上述的运动体系，根据理論天文学中的公式可以計算出任意时刻的眞太陽时与平太陽时之差。此差称为时差，且以 η 表示。

因而，根据定义可以写出:

$$t_{\odot}-m=\eta,\tag{95}$$

由此得

$$m=t_{\odot}-\eta\tag{96}$$

移項得

$$t_{\odot}=m+\eta.\tag{97}$$

根据(95)式得: 时差等于眞太陽时减平太陽时。但有时也把平太陽时减眞太陽时称作时差。若以符号 $\bar{\eta}$ 来表示含有这种意义的时差，則(95)—(97)三式可分別改写为:

$$m-t_{\odot}=\bar{\eta},\quad m=t_{\odot}+\bar{\eta},\tag{98}$$

$$t_{\odot}=m-\bar{\eta}.$$

显然，η 和 $\bar{\eta}$ 彼此間仅符号不同。因此，进行任何数字計算

时，首先必須注意在各个場合中，术語"时差"的定义为何。在苏联自 1941 年开始，已假定：

$$时差=眞太陽时-平太陽时,$$

而在 1940 年以前，此量的定义是相反的。

根据(95)式及其他公式可以計算时差 η。

按(11′)式：　$t=s-\alpha.$

在同一恒星时刻 s 我們分别对眞太陽和平太陽应用这一公式，于是

$$t_{\odot}=s-\alpha_{\odot}, \tag{99}$$

$$t_{赤平\odot}=s-\alpha_{赤平\odot}.$$

根据(94)式，后式可改写为：

$$m=s-\alpha_{赤平\odot}. \tag{100}$$

自(99)式减去(100)式，消除同类項后再根据(95)式得

$$\eta=t_{\odot}-m=\alpha_{赤平\odot}-\alpha_{\odot}, \tag{100′}$$

或根据(93)式　$\eta=(\lambda_{\odot})_{平}-\alpha_{\odot}.$

如果先算得太陽黃經变化的平均日速，以日或日的小数表示由春分瞬間到該瞬間的时間間隔，並將此二数相乘，便很容易算出該瞬間太陽的平黃經$(\lambda_{\odot})_{平}$。至于眞太陽的赤經，則須按理論天文学中

日　期	时　差	日　期	时　差
1月　1日	$-3^m.4$	7月　1日	-3.6
15日	-9.3	15日	-5.2
2月　1日	-13.6	8月　1日	-6.3
15日	-14.3	15日	-4.5
3月　1日	-12.6	9月　1日	-0.2
15日	-9.2	15日	$+4.6$
4月　1日	-4.1	10月　1日	$+10.1$
15日	-0.2	15日	$+14.0$
5月　1日	$+2.9$	11月　1日	$+16.3$
15日	$+3.8$	15日	$+15.4$
6月　1日	$+2.4$	12月　1日	$+11.2$
15日	-0.2	15日	$+5.1$
		32	-3.2

的公式計算，此已于前面說过。例如，1953年內每月1日和15日的时差(真太陽时减平太陽时)有上列数值。

作进一步的計算可以确定时差有两个条件最小値：

2月12日……………………$-14^m.3$,

7月26日……………………$-6^m.4$.

和两个条件最大値：

5月14日……………………$+3^m.8$,

11月3日……………………$+16^m.4$;

时差値在一年有四次为零，即4月16日，6月14日，9月2日和12月25日。这里引用的日期和时差的数値，都是屬于1953年的，但也很接近在其他年份中所求得的数値。利用上表的数値以及一些有关曲綫特征点的补充資料，繪成时差变化圖，由此圖可以明显地看出这些数値在一年內的变化特性。于是我們可以看出(圖56)，这种变化是相当复杂的：时差开始减小到$-14^m.3$，然后增大，后来又减小，最后又增大到$+16^m.4$，而到了年終又减小到为零，甚至还要小一些。

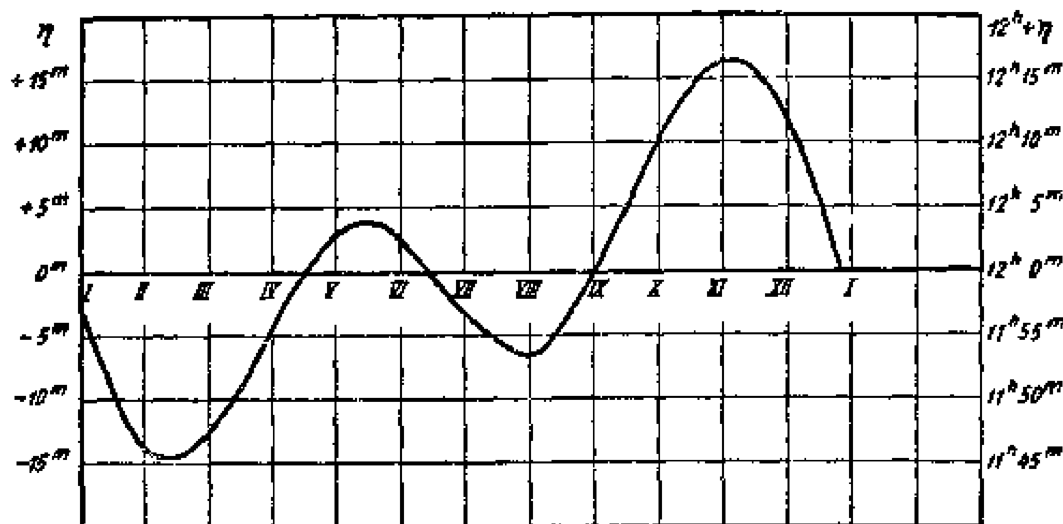


圖　56.

不难看出，时差圖是一个复杂的正弦曲綫。此曲綫是由下列

原因产生的：眞太陽循黃道运动的不均匀的影响——(91)式中的因子 $d\lambda_{\odot}$——可以以周期为一年，幅角为 $7^m.7$ 的正弦曲綫表示，而眞太陽赤緯变化的影响——(91)式中的因子 $\sec^2\delta_{\odot}$ ——可以以周期为半年，幅角为 $9^m.9$ 的正弦曲綫表示。將此二曲綫加起来構成时差圖(圖 57)。因此，精度为 $0^m.1$ 的时差可用下式計算：

$$\eta = +7^m.7 \sin(\lambda_{\odot平} + 259^{\circ}) + 9^m.9 \sin 2\lambda_{\odot平}。$$

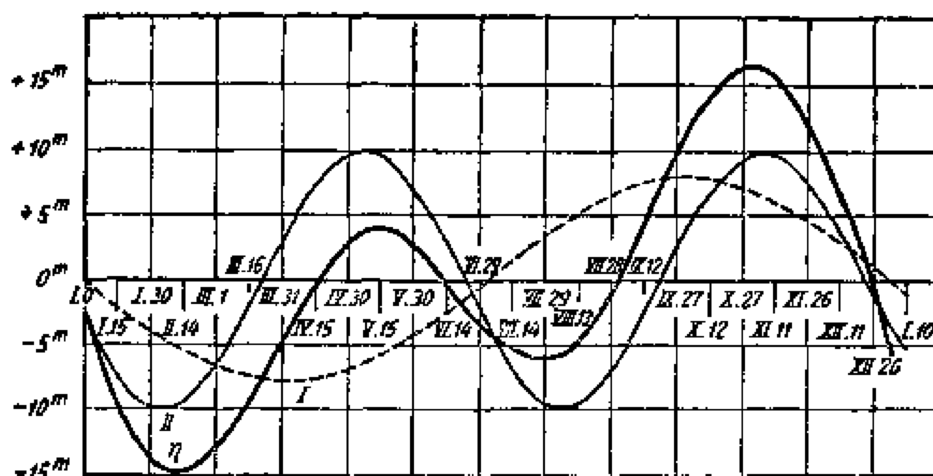


圖　57.

知道了时差 η 之値，則可根据(96)式或(97)式將眞太陽时的計算体系換为平太陽时的計算体系，或相反由平太陽时換为眞太陽时。

在§13中曾經說过，力学上的等速运动对于測量时間是最便利的。当然，任何其他运动也都可以用于这一目的。此外，在本节开始时也說过，測量單位应該是常数；但严格的說来这个要求是不可能实現的。在实踐中或者要求本位的变化微小得便可以略去它，或者要求能很容易很簡單地算出，这样可在測量結果的整理中顧及修正这些变化。我們依据太陽来測量时間正是利用不均匀运动的一种情况。由眞太陽的不均匀运动导出作为測量單位的眞太陽日，此为一变量。若我們認为它的变化很小而加以忽略的話，則得眞太陽时的測量系統，可以說这是不够精确的。为了求得更高

的精度，我們应当計算时間本位的变化，这可利用时差达成，并化为平太陽时测量系統。因此，时差可視为太陽視周日运动不均匀的改正，是太陽时角增加速度不均匀的改正。

如上所述，平太陽日是从平午正起算的，但这对人們的日常生活来說是不方便的。所以在日常生活中采用平子正作为一日的起算点，即以赤道平太陽下中天瞬間作为一日的开始。其長短与平太陽日相等，但是从子正起算的而不是从午正起算的日叫做民用日。按民用日及其时分秒表示的时間叫做民用时，以符号 m_c 表示。

換句話說，在民用时的計算系統中的測量單位与在平太陽时系統中的相同，即同为平太陽日；它們之間的差异仅仅是起算点不同而已。民用日比其相应的平太陽日早 12^h 开始，即不在平午正开始，而在其前之地方平子正开始。

因此，从民用时的定义中可以明白看出，在每一已知瞬間，民用时都較其相应的平太陽时大 12 小时，乃是因为民用日較其相应的平太陽日早 12 小时开始。因而民用时和平太陽时之間的关系可用下式表示：

$$m_c = m + 12^h. \tag{101}$$

应用(96)式和(101)式，同样可以建立民用时和真太陽时之間的直接关系，即

$$m_c = t_{\odot} - \eta + 12^h. \tag{102}$$

在按(101)式及(102)式的实际計算中，常常發生 $m+12^h$ 或 $t_{\odot}-\eta+12^h$ 大于 24^h 的事情；此时应由所得的小时数中减去 24^h，即减去一天。但加上 12^h，然后又减去 24^h，这与直接减去 12^h 完全相同。所以在实际应用(101)式和(102)式时常写为

$$m_c = m \pm 12^h, \tag{101'}$$

$$m_c = t_{\odot} - \eta \pm 12^h. \tag{102'}$$

如果m或$t_{\odot}-\eta$小于12小时，則取上面的正号，若m或$t_{\odot}-\eta$大于12小时，則取下面的負号。因为大部分都是由眞太陽时直接化为民用时的，所以几乎总是采用(102′)式，由民用时化为眞太陽时的公式也很容易由(102′)式求得，这种公式也是經常需要应用的，即

$$t_{\odot}=m_c+\eta\mp 12^h. \tag{103}$$

在(102′)式和(103)式中我們取其下面的符号，并改写为：

$$\begin{aligned} m_c&=t_{\odot}-(12^h+\eta),\\ t_{\odot}&=m_c+(12^h+\eta). \end{aligned} \tag{103′}$$

为了簡便(103′)式的数字計算，可引用补助量$(12^h+\eta)$。此量的变化过程和时差一样；这从圖56很容易看出，圖中左边沿着縱坐标軸注有时差值：$+15^m$，$+10^m$，$+5^m$，0^m，-5^m，-10^m，-15^m，圖中右边則注有补助量$12^h+\eta$之値：12^h15^m，12^h10^m，12^h5^m，12^h0^m，11^h55^m，11^h50^m和11^h45^m。

若計算只要近似地达到整分(即1^m)就够了的話，則当用(96)式和(97)式計算时的时差η以及用(103′)式計算时的补助量$12^h+\eta$，可按所需日期直接从圖56取得。

为了进行更精确的計算，則需利用"苏联天文年历"，苏联天文年历自1942年起在其太陽表中(參閱"1953年的苏联天文年历"6—20各偶数頁)載有补助量$12^h+\eta$。此种补助量在苏联天文年历中叫做"太陽在格林尼治子午圈上的时角"，这是不完全恰当的[1]，它在"年历的說明"中是以字母T^0表示的。T^0在一年中每日的数値都載至百分之一秒。

茲就便指出，很久以前，在航海天文学中就已采用了类似的补

① 关于这一点，可参閱§41例1。

助量，那里是以字母 E 表示的。

若采用这个符号，则可写为：

$$E=12^h+\eta, \tag{104}$$

那么(103′)式可改写为：

$$m_c=t_{\odot}-E, \tag{105}$$

$$t_{\odot}=m_c+E. \tag{106}$$

若按(105)式計算的时候

$$t_{\odot}<E,$$

则为了够减应预先加 24^h 于 $t_{\odot}$。若按(106)式計算时 m_c+E 大于 24^h，則应由此和数中减去 24^h。

由(104)式得出：

$$\eta=E-12^h. \tag{104′}$$

因此，在按(96)式和(97)式計算时，我們可在"年历"中找出 E，而按(104′)式計算 η。

若我們需要知道的 E 需精确到 $0^m.2$—$0^m.3$，則可依已知日期直接由該年的"天文年历"中查出此量，并按湊整規則將其湊整至 $0^m.1$。

必須指出，在 121 頁上所列的时差值就是用这种方法求得的，也就是根据"1953 年的天文年历"求得的。

在作精度上要与"天文年历"太陽表所載数值的精度相符的計算时，补助量 E 或时差 η 都必須用內插法計算。关于这一点，將在 § 36—38 中詳加叙述。

例

1. 求相应于 1953 年 3 月 10 日眞太陽时 $t_{\odot}=6^h39^m$ 的平太陽时 m。

根据圖 56 求得 3 月 10 日的时差 $\eta=-10^m$；按 (96) 式計算得 $m=6^h39^m-$

$-(-10^m)=6^h49^m$。

2. 求相应于1953年8月7日平太陽时 $m=11^h26^m.5$ 的眞太陽时 $t_{\odot}$。

由"1953年的苏联天文年历"中查得8月7日的补助量，并將其凑整至 $0^m.1$ 得 $E=11^h54^m.2$。

按(104)式計算得 $\eta=11^h54^m.2-12^h=-5^m.8$。

其次，根据(97)式按下面的格式計算得：

m	$11^h26^m.5$
η	$-\quad 5\ .8$
$t_{\odot}$	$11^h20^m.7$

3. 求相应于平太陽时 $m_1=8^h47^m$ 和 $m_2=21^h12^m56^s.3$ 的民用时 m_{c_1} 及 m_{c_2}。

根据(101′)式用心算算得：

$$m_{c_1}=20^h47^m;\quad m_{c_2}=9^h12^m56^s.3.$$

4. 求相应于民用时 $m_{c_1}=18^h19^m57^s.93$ 和 $m_{c_2}=3^h11^m.5$ 的平太陽时 m_1 及 m_2。

根据(101′)式用心算算得：

$$m_1=6^h19^m57^s.93;\quad m_2=15^h11^m.5.$$

5. 求相应于1953年11月3日的眞太陽时 $t_{\odot}=14^h27^m.7$ 的民用时 m_c。

根据(105)式依下面的格式計算得：

$t_{\odot}$	$14^h27^m.7$
E	$12\ 16\ .4$
m_c	$2^h11^m.3$

其中补助量 E 是由"1953年的苏联天文年历"(第18頁)中查出的，并凑整至 $0^m.1$。

6. 求相应于1953年6月3日的民用时 $m_c=17^h43^m.3$ 的眞太陽时 $t_{\odot}$。

按圖56求得6月3日的补助量 $E=12^h2^m$。根据(106)式依下面的格式計算得：

m_c	17^h43^m
E	$12\ \ 2$
$t_{\odot}$	5^h45^m

和数中首先求得的为 29^h；在減去 24^h 后直接写为 5^h。这种計算当然是用心算进行的。

§32. 在各子午綫上的时間測量·地方时和格林尼治时·日界綫

由上所述我們已經知道，在每一观測地，在地面上的每一点，

都可以算出其地方时。地方时可屬于按春分点計算的时間系統——恒星时，也可屬于按眞太陽計算的时間系統——眞太陽时，也可屬于按平太陽計算的时間系統——平太陽时，同样也可屬于民用时計算系統。現在我們提出一个問題，对地面上任意兩点譬如說 A、B 兩点，按这些系統中的任一系統計算时間有怎样的差异？

設这兩点的地理經度分別为 λ_A 和 λ_B，幷由格林尼治地理子午圈向东計算（参閱 § 11 ）。

玆应用前所建立的任一天体的时角差与观測地的經度差之間的关系（§ 18，定理 11）。这一关系对东經而言可陈述为：在兩个不同的地面点 A 和 B 上于同一物理时刻內所測得的任一天体的时角之差等于这兩点地理經度之差，卽：

$$t_A - t_B = \lambda_A - \lambda_B.$$

显然，这个定理和这一公式不仅适用于任一天体的时角，同样也适用于天球上一切点的时角，且不因在天球上的是天体或者不是天体而变。

我們將此定理和公式用于天球上的点，这些点的时角在数值上是等于用某个計算系統来測量时間所得的結果，卽將其用于春分点♈、眞太陽☉及平太陽。

因此有

$$t_{\Upsilon_A} - t_{\Upsilon_B} = \lambda_A - \lambda_B,$$

$$t_{\odot_A} - t_{\odot_B} = \lambda_A - \lambda_B,$$

$$t_{平\odot_A} - t_{平\odot_B} = \lambda_A - \lambda_B.$$

由于我們已知

$$t_{\Upsilon} = s \text{ 和 } t_{平\odot} = m,$$

故上式中的首式和末式可改写为

$$s_A - s_B = \lambda_A - \lambda_B,$$

$$m_A - m_B = \lambda_A - \lambda_B.$$

我們都知道，对于减数和被减数同加一数或同减一数其差不变。因此上式中的末式也可表示为下面的形式：

$$(m_A \pm 12^h) - (m_B \pm 12^h) = \lambda_A - \lambda_B,$$

根据(101′)式，上式可以写为：

$$m_{c_A} - m_{c_B} = \lambda_A - \lambda_B.$$

在以上各种情况中，脚符号 $_A$ 和 $_B$ 表示相应量屬于 A 点或 B 点。这些符号在以后之叙述中具有与此同样的意义。

于是，我們求得：

$$\begin{aligned} s_A - s_B &= \lambda_A - \lambda_B, \\ t_{\odot_A} - t_{\odot_B} &= \lambda_A - \lambda_B, \\ m_A - m_B &= \lambda_A - \lambda_B, \\ m_{c_A} - m_{c_B} &= \lambda_A - \lambda_B. \end{aligned} \tag{107}$$

这四个公式的意思，可用文字表达为：在同一系統內測得的任意兩个地方时之差，也就是在不同的兩个地面点 A 和 B 上于同一物理时刻內的恒星时之差，真太陽时之差。平太陽时或民用时之差，在数値上等于这兩地的地理經度之差。有时也可以这样說："地方时之差等于經差"，这比較簡單，但却不那么正确和严密。我們要注意到在(107)式中和在所有的这些定义中，一定要假設地理經度是以时表示的。如果經度以度表示，則只能說經差和地方时之差成比例，而比例系数仍然是 15。

由(107)式同样可以看出，位于同一子午綫上的各点旣然經度相同，則可認为其地方时亦相同。

因此，我們不說"莫斯科地方时"，"列宁格勒地方时"，"哈尔柯夫地方时"，"格林尼治地方时"等等，而常說"莫斯科子午綫时"，"列宁格勒子午綫时"，"哈尔柯夫子午綫时"，"格林尼治子午綫时"等等。

格林尼治地方时，或格林尼治子午綫时，在球面天文学和实用天文学中起着重大的作用。这是因为：第一，格林尼治子午綫是計算地理經度的首子午綫或零子午綫；第二，根据 1925 年的国际决議，一切天文年历（苏联的和外国的）都按格林尼治子午綫編算。因此，規定用符号將任一測量系統中的格林尼治时及任一地面点的地方时加以区別开来。正如我們已經知道的那样，对任一点的地方时可表示为：

s——地方恒星时，

m——地方平太陽时，

m_c——地方民用时。

对格林尼治地方时則采用下列符号：

S——格林尼治恒星时，

M——格林尼治平太陽时，

T_0——格林尼治民用时①。

設 B 点为格林尼治（参閱圖 28），A 为任一地面点。遵照剛才所述的符号，写为：

一方面　　$s_B=S,\quad m_B=M,$

$$m_{c_B}=T_0;$$

另一方面　　$s_A=s,\quad m_A=m,$

$$m_{c_A}=m_c.$$

此外，由假定　　$\lambda_B=0,$

故可認为

$$\lambda_A=\lambda,$$

字母 λ 表示任一地面点距格林尼治的經度。

按照格林尼治的情况及所采用的符号，(107)式可改写为：

① 在"苏联天文年历"中与法定的标准符号相反，格林尼治民用时，即世界时以符号 M 表示。

$$
\begin{aligned}
s-S&=\lambda,\\
m-M&=\lambda, \qquad (108)\\
m_c-T_0&=\lambda.
\end{aligned}
$$

对于眞时的类似公式则几乎未被采用。

(108)式同样有着很大的实际意义。它首先指出了，自格林尼治起算，任一点的地理經度都是可以測定的。很明显，这必須測定同一时刻該点的地方时和相应的格林尼治时，并按(108)式求出它們的差数。

若已知道一点的地理經度，则在必要的情况下，这些公式还能用来求出与該点已知时刻相应的格林尼治时。只是为了这种目的，最好將这些公式改写为：

$$
\begin{aligned}
S&=s-\lambda,\\
M&=m-\lambda, \qquad (109)\\
T_0&=m_c-\lambda.
\end{aligned}
$$

根据§18的(17′)式，对于西經而言，(107)式应改写为：

$$
\begin{aligned}
s_A-s_B&=\lambda_B-\lambda_A,\\
t_{\odot_A}-t_{\odot_B}&=\lambda_B-\lambda_A, \qquad (107')\\
m_A-m_B&=\lambda_B-\lambda_A,\\
m_{c_A}-m_{c_B}&=\lambda_B-\lambda_A,
\end{aligned}
$$

并需在載于129頁內的文字叙述中的末尾加入一語“符号相反”。

由此得出結論，对于西經来說，(108)式应写成：

$$
\begin{aligned}
S-s&=\lambda,\\
M-m&=\lambda, \qquad (108')\\
T_0&=m_c=\lambda.
\end{aligned}
$$

而(109)式应写成：

$$
\begin{aligned}
S &= s+\lambda, \\
M &= m+\lambda, \qquad\qquad (109') \\
T_0 &= m_c+\lambda.
\end{aligned}
$$

十分明显，若合并这兩种情况，则公式(107)和(107′)，(108)和(108′)，(109)和(109′)可用下列公式代替，即

$$
\begin{aligned}
s_A - s_B &= \mp(\lambda_A-\lambda_B)\begin{cases}W\\E\end{cases}, \\
t_{\odot_A} - t_{\odot_B} &= \mp(\lambda_A-\lambda_B)\begin{cases}W\\E\end{cases}, \\
m_A - m_B &= \mp(\lambda_A-\lambda_B)\begin{cases}W\\E\end{cases}, \qquad\qquad (107'') \\
m_{c_A} - m_{c_B} & \mp(\lambda_A-\lambda_B)\begin{cases}W\\E\end{cases},
\end{aligned}
$$

其次

$$
\begin{aligned}
S - s &= \pm\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}, \\
M - m &= \pm\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}, \qquad\qquad (108'') \\
T_0 - m_c &= \pm\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases},
\end{aligned}
$$

最后

$$
\begin{aligned}
S &= s\pm\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}, \\
M &= m\pm\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}, \qquad\qquad (109'') \\
T_0 &= m_c\pm\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}.
\end{aligned}
$$

于此，和在合并式(17″)中一样，对于西經(W)应取上面的符号，对于东經(E)应取下面的符号。在今后的論述中，我們將不只一次的会用到这些公式。

例

1. 雅典民用时为　　　　$m_c=7^h58^m$.

試求相应的格林尼治民用时 T_0。

雅典的經度为 1^h35^m E(参閱書末附录 II)。按下列格式求得:

m_c	7^h58^m
$-\lambda_E$	$-1\ 35$
T_0	6^h23^m

因而,与已知的雅典地方民用时相应的格林尼治民用时为 6^h23^m。

2. 已知馬德里的地方恒星时为

$$s=16^h23^m11^s.35,$$

試求相应的格林尼治恒星时。

馬德里的經度为 $0^h14^m45^s.09$W。按下列格式求得:

s	$16^h23^m11^s.35$
$+\lambda_W$	$+\ 0\ 14\ \ 45\ .09$
T_0	$16^h37^m56^s.44$

根据以上的論述和所得的公式可以看出，若某地位于格林尼治之西,則該地的地方时就小于格林尼治时,幷且离格林尼治越西就越小。反之,若某地位于格林尼治之东,则它的地方时就大于格林尼治时,幷且愈东愈大。

若設想有一人由东向西作环球旅行，每次由一地走到另一地时都按当地的地方时撥准他的表，由于他是由东到西按經度逐渐地前进,所以都要向后撥动时針。显然,当他結束了环球旅行回到出發点时,他的表上所示的时刻与該地鐘表所示的相差一整天。这就是說,在日期的計算上他少了一天,即較不参加他的旅行的故乡居民落后了一天。

为了更好的說明为什么会产生这种現象，設想有一人由东向西,沿着赤道或任一緯圈以一天的时間环行地球一周。我們知道,太陽以及其他天体的視周日运动的方向是由东向西的。这是由于地球以相反方向繞自轉軸旋轉。即由西向东轉动的緣故。因而,旅行者的运动方向与地球的周日运动方向相反，它的速度等于地面点的速度而方向相反。因此，太陽和其他天体的視周日运动对这个旅行者看来是停止着的；他好象在这一晝夜的过程中沒有参

加地球的轉动；在他的計算中恰巧失掉了一天。这与实际旅行的差別只是在实际环球旅行中这一晝夜是逐漸地失掉的，而在一日的环行中則是很快的少了一天。但事实的本質并不因此而改变。

現在我們来研究一下，如果旅行是反方向进行的，結果又將怎样？因由西向东行，故表总是向前撥，而旅行者完成环球旅行后較出發点的时間多过了一天。若旅行者前进的速度等于地面点轉动的綫性速度，則观測者繞地軸轉动的速度好象加了一倍，而在一晝夜內已完成兩个整周，因而就有一个多余日。

这可以具体地陈述为：当旅行者由东向西回到出發地时說是六月廿二日，但实际上已經是六月廿三日了；当旅行者由西向东回到出發地时說是六月廿四日，但实际上这还是六月廿三日。

在1520年的第一次麦哲倫环球旅行的參加者头一次遇到了这种現象，当他們回到故乡的时候，發現在时間的計算上，他們与故乡的恰恰相差一整天，而感到非常惊奇和疑惑。

为了往后不再發生类似的情形，曾采用了这样的假定：在地面上作一条假定綫，即所謂日界綫，它距格林尼治子午綫約为180°。这条日界綫处处都在海洋面上經过，任何地方都不接触陆地，也就是繞过陆地、島嶼、半島和海角等等。这条綫由北極沿着180°經綫前进，然后偏东，繞过弗蘭格尔島，捷日涅夫角，通过白令海峽后，它又偏西，沿180°經綫通过太平洋，由东边繞过新西蘭，最后，又正确地沿着180°經綫到达南極。

根据上面的論述，为了避免在計算日期上的差异，那么当船艦或飞机由东向西越过日界綫时，在日期的計算上应加一日。例如，过綫前是六月廿一日星期日，过綫后就应立即算作是六月廿三日星期二。反之，船艦或飞机由西向东越过日界綫时，則日期应重复一次。例如，在六月廿三日星期二通过此綫，則第二天仍应算是六月廿三日星期二。

对于这一問題，还可从另一个观点出發来处理，即历日仅按民用时計算。各地的民用日都是从各該地的平子正起算的。但是子正(或午正)，或者更正确些說，在此瞬間为子正(或午正)的那个地面点或綫，沿着地面不断地由东向西移动，并在24小时內，即在一晝夜(太陽日)內繞行地球一周。对于整个地球說，每一天开始于地球上的什么地方呢？显然，这完全是一种假想的事情。但根据以上所述，則很明显，每一天都假定其在日界綫开始是最自然的。例如在苏联每一天开始于亞細亞大陆之極东处，即开始于白令海峽的捷日涅夫角。譬如說三月二十日最先在那个地方开始，然后此日在海參威、鄂木斯克、莫斯科(过了10小时)开始，在格林尼治(过了12小时)开始，在华盛頓(过了17小时)开始，最后在阿拉斯加和聖德維奇群島开始，此时已較捷日涅夫迟了23小时。

从这些概念出發，在环球旅行中增加一日和失去一日还可以这样来闡明。假如观測者东行，也就是說迎着子正而行，則对他来說，子正的来到較其留在原地不动时早。因而，他的一天就比不动的观測者的一天短一些，因而，他計算其旅行时間要多一些，并且很明显，他較不动的观測者恰巧多算了一天。

反之，在西行当中，旅行者的一天比較長些；因而，当他結束了旅行回家之后，他較故乡沒有參加旅行的人們少算了一天。

§33. 按区域測量时間的系統·区时·法定时·民用时、区时和法定时的换算

采用地方民用时，將会使每一地点都必須按其特有的地方时来生活，这在現代的經济、社会、国家和国际生活的条件下会引起許多实踐上的和組織上的不方便。因此現在在日常生活中，我們采用所謂**区时**。

按区域計时的优点乃在于，它能將全世界在时的計算上納入

一个統一的系統之內。茲將其敘述于下。

以每隔十五度經度的地理子午綫將整个地球分为廿四帶，或常称之为时区。在一个时区境內的一切地面点都使用相同的时間，即使用以該区中央子午綫为准的民用时。因为相鄰兩区中央子午綫的經差为十五度或一小时，故在兩个相鄰的区域內所計算的时間之差恰好等于一小时。以格林尼治子午綫为中央子午綫的那一区視为起始区或零点区，因而零点区的区时即是格林尼治的民用时，所以格林尼治民用时常称为世界时。中央子午綫是格林尼治以东 15° 的經綫的时区称为第一区。几乎所有的中欧国家都在这一区內。第二区包括苏联西部和其他許多国家（見本書末之附圖）。时区的計算通常由零点区向东由 0 到 23。不难理解，任一区的时間与零点区的时間即与世界时相差的小时等于区号的相差数。区时通常以附有相应于区号的脚符号的字母 T 表示，例如 T_0, T_1, T_2, $\cdots T_6$, $\cdots T_{12}$, $\cdots T_n$, $\cdots$分別表示零、一、二、六、十二等区的区时。

因此，若知世界时 T_0 和区号 n，則这一区的区时 T_n 显然可按下式求得:

$$T_n = T_0 + n. \tag{110}$$

为了反算，可將(110)式改写为:

$$T_0 = T_n - n. \tag{111}$$

比較任意兩区 n 和 m 間的时間是很容易的，或者預先化为零点区的时間，或者一开始就根据(110)式或(111)式所导出的公式:

$$T_n = T_m + (n - m) \tag{112}$$

进行，而与此二区号哪一个大或哪一个小沒有关系。因为 n 和 m 总是整数，所以当化某一区的区时为任何其他区的区时的时候，分、秒是不变化的，而变化的只是整小时数。这样就表現出了按区域計时法的主要优点，是在于整个地球上的一切鐘表，如果都正确

地标示着其所在地区的区时的話，则它所标示的分和秒都相同。

因而，鐘表所示的时刻彼此相差只应是整小时数。这就使由某一区的时間化为另一区的时間容易进行。对此，只須知道兩个时区的区号便可以了。

但在确定相应于某一地点的区号时，必須注意：只有在大海、沙漠、冻土帶和荒蕪而人烟稀少的地区，时区界才确实是沿着上述的地理子午綫来划分的。在地面上划时区界时，一般都要考虑到地理、經济、政治和国家各方面的狀况；細看所附的时区圖（附录 V）就很容易發覺这一点。

現在我們来研究化經度（由格林尼治起算）为 λ 的地方民用时 m_c 为区号为 n 的区时 T_n 的問題。

因为，一方面根据（109″）式

$$T_0=m_c\pm\lambda\begin{cases}\mathrm{W}\\\mathrm{E}\end{cases},$$

而另一方面根据（111）式

$$T_0=T_n-n,$$

故

$$m_c\pm\lambda=T_n-n\begin{cases}\mathrm{W}\\\mathrm{E}\end{cases}.$$

由此得：

$$T_n=m_c+(n\pm\lambda)\begin{cases}\mathrm{W}\\\mathrm{E}\end{cases},\tag{113}$$

此式供化民用时为区时之用；而

$$m_c=T_n-(n\pm\lambda)\begin{cases}\mathrm{W}\\\mathrm{E}\end{cases}.\tag{114}$$

则供化区时为民用时之用。

于是，根据（113）式可視（$n\pm\lambda$）为化地方民用时为該区区时的改正数。

当时区界是沿着相应的子午綫划分时区时与地方民用时之間的差异不会超过 30^m。实际上，它有时是超过 30^m 的，但所超过的也并不多。

同时不难理解，对于西半球而言，此处

$$12^h < n < 24^h, \tag{115}$$

$n+\lambda_W$ 总是在 24^h 左右。显然，就西半球所求得的化民用时为区时的改正数实則等于：

$$(n+\lambda_W)-24^h, \tag{116}$$

这一点在各种实际計算时都应該注意到。还应当記住：对于在时区中央子午綫以西的地方，此种改正数

$$[(n+\lambda_W)-24^h]$$

或
$$(n-\lambda_E)$$

是正的，而对于在时区中央子午綫以东的地方，則相反，是負的。

苏联以及其他国家根据純粹的經济需要，曾頒布过关于將时針較区时撥快一小时甚至几小时的法令。在苏联，这样的法令是于 1930 年頒布的，到現在这項法令还是有效的。因此，我們現在是按着較相应的区时快一小时的时間作息的。这种以政府法令所規定的时間称为**法定时**，并以字母 D 表示。因为撥針总是撥整时数而多半是一小时，所以法定时可看作是区时的变形。因此可以說：現在苏联的每个居民地并不按其所在时区的区时作息，而是按着区号大一号的东鄰时区的区时作息。根据定义，对区号为 n 的时区而言，則有：

$$D_n = T_n + 1^h, \tag{117}$$

因而
$$D_n = T_0 + (n+1), \tag{118}$$

以及
$$T_0 = D_n - (n+1). \tag{119}$$

根据(109)式和(119)式可以写成：

$$m_e - \lambda_E = D_n - (n+1),$$

由此得：
$$D_n = m_e + [(n+1)-\lambda_E]. \tag{120}$$

我們以字母 d 表示化民用时为法定时的改正数，即

$$d = [(n+1)-\lambda_E]。 \tag{121}$$

此时，化民用时为法定时的公式(120)式可写为:

$$D_n = m_c + d. \tag{122}$$

对于反算，即由法定时化为民用时，显然是:

$$m_c = D_n - d. \tag{123}$$

法定时采用于东半球(对格林尼治子午綫而言)，主要是应用于苏联，因此我們不再推导用于西半球的公式，且各处都写成 λ_E，即由格林尼治向东計算的經度。

显然，改正数 d 应满足下列不等式:

$$+30^m < d < +1^h30^m,$$

即局限于 $+30^m$ 和 $+1^h30^m$ 之間。而在时区界不是循着地理子午綫的地方可能稍許超过这个界限。

讀者应注意，第二时区的法定时在文件和口語中常称为"莫斯科民用时"。这样的术語，从科学的天文观点来看当然是不正确的。在天文学中，特别是在球面天文学和实用天文学中，这样的措辞是应当避免的。

例

1. 已知世界时为 $T_0 = 6^h37^m$，

求其相应的第 7 时区($n=7$)的区时。

根据(110)式: $T_7 = 6^h37^m + 7^h = 13^h37^m$.

2. 求相应于第 3 时区($n=3$)的区时

$$T_3 = 19^h43^m56^s.2$$

的世界时。

根据(111)式:

$$T_0 = 19^h43^m56^s.2 - 3^h = 16^h43^m56^s.2.$$

3. 求相应于第 2 时区的区时

$$T_2 = 14^h33^m17^s$$

的第 8 时区的区时($n=8$; $m=2$)。

根据(112)式:

$$T_8 = 14^h33^m17^s + (8^h - 2^h) = 20^h33^m17^s.$$

4. 求相应于第 10 时区的区时

$$T_{10}=15^h10^m37^s.52$$

的第 3 时区的区时($n=3$; $m=10$)。

仿前例求得:

$$T_3=15^h10^m37^s.52+(3^h-10^h)=8^h10^m37^s.52.$$

5. 求相应于区时　　$T_2=13^h43^m$

的雅典民用时。

雅典的經度 $\lambda_E=1^h35^m$ E(格林尼治之东); 雅典位于第二时区内($n=2$)。

根据(114)式按下面的格式算得:

λ_E	1^h35^m
n	2
$-(n-\lambda_E)$	$-$ 0 25
T_n	13 43
m_c	13^h18^m

6. 求相应于东京民用时　　$m_c=19^h53^m$

的东京区时。

东京的經度 $\lambda_E=9^h19^m$ E; 东京位于第 9 时区内($n=9$)。

根根(113)式按下面的格式計算得:

λ_E	9^h19^m
n	9
$+(n-\lambda_E)$	$-$ 0 19
m_c	19 53
T_n	19^h34^m

7. 求相应于区时　　$T_{19}=11^h43^m29^s$

的华盛頓民用时。

华盛頓的經度 $\lambda_W=5^h8^m16^s$ W, 华盛頓位于第 19 时区内($n=19$)。

根据(114)式按下面的格式計算得:

λ_W	$5^h\ 8^m\ 16^s$
n	19
$-[(n+\lambda_W)-24^h]$	$-$ 0 8 16
T_n	11 43 29
m_c	$11^h35^m13^s$

8. 求相应于拉巴拉塔民用时

$$m_c=17^h39^m46^s$$

的拉巴拉塔区时。

拉巴拉塔的經度 $\lambda_W=3^h51^m44^s$ W，拉巴格塔位于第 20 时区内($n=20$)。

根据(113)式按下面的格式計算得：

λ_W	$3^h51^m44^s$
n	20
$+[(n+\lambda_W)-24^h]$	$-$ 0 8 16
m_c	17 39 46
T_n	$17^h31^m30^s$

9. 求相应于区时 $T_n=4^h36^m$

的法定时。

根据(117)式可立即写出： $D_n=5^h36^m$.

10. 求相应于法定时 $D_n=14^h41^m$

的区时。

象在例 9 中那样，断定所求的区时为：

$$T_n=13^h41^m.$$

11. 求相应于世界时 $T_0=11^h34^m$

的第 5 时区($n=5$)的法定时。

根据(118)式得： $D_5=11^h34^m+(5^h+1^h)=17^h34^m$.

12. 求相应于第 7 时区($n=7$)法定时

$$D_7=19^h56^m$$

的世界时。

根据(119)式得： $T_0=19^h56^m-(7^h+1^h)=11^h56^m$.

13. 求相应于法定时 $D=7^h15^m$

的旧克里米亞民用时。

旧克里米亞的經度 $\lambda_E=2^h20^m$ E，它在第二时区($n=2$)內。

根据(121)式和(123)式按下面的格式計算得：

λ_E	2^h20^m
$n+1$	3
d	0 40
D	7 15
m_c	6^h35^m

14. 求相应于塔什干民用时 $m_c=21^h19^m$

的法定时。

塔什干的經度 $\lambda_E=4^h37^m$ E，它在第五时区($n=5$)內。

根据(121)式和(122)式按下面的格式計算得:

λ_{16}	4^h37^m
$n+1$	6
d	1 23
m_c	21 19
D	22^h42^m

§34. 关于按太陽測量时間的各种系統的發展簡史

驟然看来,也許会覚得奇怪和难以理解,为什么在天文学中要研究和采用这么多种測量时間的系統,按太陽測量时間的有:眞太陽时、平时、民用时、区时和法定时;按春分点测量时間的有恒星时。甚至还可能产生这样的疑問:需要这么多的測量时間的系統嗎?不能減少一些嗎?

为了回答这些問題,那怕是局部的也好,我們都必須来看一看測时历史的發展。

关于时間的本質及其量度的观念,由于生产組織形式的改变和社会生产力的發展,在近几百年来逐漸地在变化。社会經济結構和社会机構的日益复杂,对于什么是时間的这一問題的明确說明和时間的精密測量提出了更高的要求。而社会生产力的發展和伴随而来的技术水平的普遍提高,为設計更精密、更完善的測量时間的仪器創造了良好的条件,同样也促使了一些与时間及其測定有关的定义和术語的进一步确定。

在古代奴隶社会里,只是根据太陽来进行最簡單的很粗略的时間測量。在天文科学中按**眞太陽**測量时間的系統,几乎是在这个时期的末期才由希臘天文学者托雷密等發明的。当时測量时間的仪器是極其簡陋而不精确的,例如日晷、日鐘、水鐘(滴漏)和沙鐘等。

最早出現日晷的大概是在古代埃及(金字塔时期)。紀元前

547 年，它由埃及傳至希臘，然后又傳至其他国家。日晷是一种按太陽測量时間的最簡單的仪器。日鐘是日晷在技术上的进一步改进。日鐘出現在紀元前 263 年的古罗馬。

沙鐘是在紀元前八世紀發明的；而水鐘和銅漏是紀元前三世紀在埃及發明的；在罗馬于紀元前 157 年才出現銅漏。用这些仪器測量时間，其精度勉强能达到若干分，但这已足以滿足当时社会的經济和社会要求了。

直到中世紀，測量时間的仪器才开始逐漸改善。譬如在 1300 年發明了具有齿輪的鐘。

在資本主义关系的萌芽时期，生产力的进一步發展，要求更精密的測量时間，同时也为此創造了技术前提。茲举出一些資料如下：

1500 年——發明了具有彈簧發条和轉动齿輪裝置的怀表；

1602 年——加俐略發現了摆动的等时性；

1657 年——黑尔·久根斯發明了摆鐘；

1658 年——尔·古克發明了具有平衡輪的怀表；

1715 年——由于克拉克姆發明了傳动器而改良了摆鐘；

1736 年——哈里逐發明了天文鐘。

由于这些發明和改良，使測量时間的精度大大地提高了。

因而不完善的按真太陽測量时間的系統就已完全不适用于社会需要了；而采用平太陽时这一要求就随之产生和日益迫切。1780 年在日內瓦，1792 年在倫敦，1810 年在柏林，1816 年在巴黎等地都先后在社会和国家生活中采用了平太陽时。

平太陽时实际上只單純地在天文学內采用，并且也只用到 1925 年为止。在人民日常生活中自古以来就采用民用时而不是平太陽时。一天的計算从子正开始，甚至在古罗馬就已知道了。这种計时法获得普遍的承認，它几乎是与按平太陽測量时間的系

統的推广以及平太陽日的采用同时开始于十九世紀初。

随着生产力的繼續發展，电报的出現，鉄路以及其他交通的發达等等，采用地方民用时就显得不方便了。統一时間計算的要求首先是在个别几个国家內成熟，然后在全世界范圍內也成熟了。因此在十九世紀中叶，許多国家至少在鉄路和邮电方面采用了統一的国家时；英国采用了格林尼治时（1840年），法国采用了巴黎时，俄国采用了彼得堡时等等。

但对于国土沿东西布展的国家例如美国来說，采用統一的国家时还不能使問題得到滿意的解决。加之資本主义的进一步發展，使国际間的各种联系空前活躍，开始需要国际范圍內的統一測量时間的系統。因而就产生了世界时或区时。

按区域計时的思想的产生和首次实現是在1884年。而从1892年至1895年間，几乎在所有的西欧国家都采用了区时；1911年在法国，1919年（二月八日）在俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国，1924年（三月十五日）在苏联，都先后采用了区时。現在世界上大多数国家也都采用了区时。

近35年来，在許多国家里，其中包括苏联，在經济見解的影响下采用了法定时（参閱§33）。

在天文学中作为时間的基本單位的首先是恒星日；沒有恒星时，天文学家們就不可能对恒星进行观測。第二种測量时間的基本單位在天文学及其接近的科学（气象学、物理学、力学等）中所共用的是平太陽日。因此，在天文学及其他自然科学中一般都采用民用时。眞时之所以具有价値，只是因为我們可以由太陽的各种观測中直接測定它。至于平太陽时，自1925年起，在天文学中几乎完全不采用了，从历史的观点来看，保留它只有作为民用时和眞时的中間环节的价値。

§35. 回归年・历法

为了量度長时間間隔而利用了地球的公轉。地球公轉一周的时間称为一年，作为量度長时間間隔的基本單位。

但我們只能根据地球和太陽以外的其他物体（例如恒星或想像点，而想像点的位置也要依恒星和太陽来确定）（参閱§13），来計算地球的公轉周期。

假如我們选擇一个自行不明显的遙远的任意恒星来計算地球的公轉周期（参閱§61），則得恒星年，恒星年可定义为地球（其实是地球中心）接續兩次經过所选的恒星、包含日心和黃道極的平面的时間間隔。

一恒星年等于365.2564平太陽日。

假如我們选擇春分点♈来計算地球公轉的周期，則得回归年，回归年可定义为地球中心接續兩次經过日心和春分点联綫的时間間隔。

一回归年等于365.2422平太陽日。

假如我們为了同一目的而选擇地球軌道上的近日点，即太陽和地球間距离最小的一点，則得近点年，近点年可定义为地球接續兩次經过地球軌道近日点的时間間隔。

一近点年等于365.2596平太陽日。

最后，假如我們根据白道的升交点来計算地球的公轉周期，則得交点年，交点年可定义为地球接續兩次經过交点綫的时間間隔，此交点綫即是白道面与黃道面的交綫，此綫的一部分是由日心朝向升交点方面的。

一交点年等于346.62平太陽日。

假如象我們确定一日長短时所作的那样（参閱§14，§30和§31），根据我們直接看到的視运动来測定一年的長短，那么我們

必須观察地球的視反映，即"真"太陽沿黃道的視周年运动来代替地球在軌道上的实际运动。

此时，恒星年可定义为眞太陽接續兩次經过沒有显著自行的任一"恒星"的黃經圈的时間間隔；回归年可定义为太陽接續兩次經过春分点♈的时間間隔；近点年可定义为太陽接續兩次經过近地点的时間間隔(參閱§29)，交点年則定义为太陽接續兩次經过白道升交点的时間間隔(參閱§60)。

近点年应用于理論天文学中，而交点年則在日月蝕理論中起着作用。回归年在建立長时間間隔的測量系統中，即在历法中具有主要的作用。

这是由于一回归年恰巧是太陽赤緯的变化周期，是太陽經过分点和至点的周期之故。因而一年季节的开始与回归年有关，它决定了地球自然界中的一切季节变化。

历年应該包含一定的整日数，并应具有方便的中間区分。現在采用星期周和月份作为这种中間区分，一星期为7天，一月为28天到31天。無論是日、星期和太陰月[1]，回归年都不包含它們的整数，而且所有这些时間間隔都是不可公約的。这給建立十分精确和严密的历法造成了很大的困难。因为年和日不可公約，所以絕对精确的历法是不可能有的。

历法史的叙述不是我們的任务。但是应当指出，过去曾建立了許多不同的历法系統。最初的历法是根据月球的运行及月相的变化而建立的。古罗馬历以及至今还应用于伊斯蘭教各国的穆罕默德历就是这种太陰历的实例。人們也曾經企圖將按月亮及太陽計算时間的方法协調起来，犹太历便是这种历法。但是所有这些历法都是很复杂而不完善的。

---

① 所謂太陰月就是接續兩次新月(或滿月)的时間間隔；其長为29.531平太陽日。

最初的太陽历产生于古代埃及。还在紀元前2700年左右就已测定了一回归年为365日，历年也就采用等于这一回归年的整日数。因为历年比回归年几乎整整短四分之一日，所以每經四年，要差一个整日。春分迟到一日，而發生于下一历日。这样約經1460年后，春分逐漸的遍及历年內各天而回到原来开始的日期。

約在紀元前三世紀的时候，埃及的天文学家們測定了回归年的長度为$365\frac{1}{4}$日。而在紀元前二世紀的时候，希臘人吉柏尔赫更精确地測定了这个数値为$\left(365\frac{1}{4}-\frac{1}{300}\right)$日。

紀元前46年，罗馬皇帝儒略凱撒在亞历山大天文学家索吉根的直接參加下，对历进行了成功的改革，因此称这种历为儒略历或旧历。在儒略历中，借适当的更換年的長度为365日及366日，即所謂平年与閏年的更換以达到使历年与回归年相协調，每四年中有三个平年和一个閏年。因此，平均一儒略历年恰好等于365.25日。在閏年中多出的一日加在2月28日和3月1日之間(为2月29日)。凡西历紀元年数能以四除尽者即为閏年。

但是，儒略历年比回归年多0.0078日，因为

$$365.25-365.2422=0.0078.$$

所以在儒略历中也和在埃及历中一样，要發生春分移动的現象，但是方向却相反，而且很緩慢。春分逐漸地来到愈来愈早的历日，約經128年积成一日之差数。自公元325年(那时已建立了宗教的紀年法規)起，到1580年止，一共相差10日，此时春分已不像325年那样發生于三月廿一日，而發生于三月十一日。因为这从宗教的观点来看是难以容忍的，所以教皇格列高里十三世，在1582年根据意大利医生利里奥在1576年所提出的方案，重新改革历法。这种历法称之为格列高里历或新历。为了消除所积累的差数十日，把1582年10月4日后之一日不算作5日而定为10月15

日。为了以后历法和自然的协调性不被破坏，稍許改变了平年和閏年的更替程序。因为儒略历中 128 年积累一日，所以在 384 年中卽約在 400 年积累 3 日多，而此数必須从历的計算中消除。为了这一目的，当时规定凡西历紀元数能以四除尽者卽为閏年。例如，1600 年無論按旧历或新历計算都是閏年，而 1700、1800 和 1900 年，按旧历計算为閏年，而按新历計算为平年。

根据这个法則不難算出格列高里历年的平均長度。事实上，一个平均格列高里历年等于 $(365.25\times400-3)\div400=146097\div$ $\div400=365.2425$ 平太陽日。

这样，格列高里历年比回归年只長 0.0003 平太陽日。因而，經三千年才积成一日之差数。

現在各国几乎都采用格列高里历或**新历**。

建立历法时还要解决兩个重要的問題：以何日作为每年的岁首，采用那一年作为年的計算起点，卽关于"新年"的日期和历元的問題。由于这样的事情純粹是假定的，所以在各个时代和各个国家解决这兩个問題的方法是显然不同的。現时新年的日期是 1 月 1 日，而公認的历元是在第六世紀根据罗馬的修道士久尼西的建議而建立的，以所謂"基督誕生"的那一年作历元，这是与历史資料沒有任何共同点的敎义"事件"。

一年被分为若干月；每月的長短及其名称我們是从古罗馬历中承受过来的。月虽然是太陰历的殘余，但与月亮的視运动却全無关系。七天一星期也曾与陰历有若干关系，因为每次月相的長短約为七天。但后来發現古代所知的行星数目也是七个，上述关系就不存在了，或者正确些說，这种关系被掩盖了。

这时，一个星期中的每一天和行星中的每一顆行星一样，都是献給古罗馬多神敎的主神之一的。在意大利語、法語、英語和德語中尙保留了这种星期中日期的名称，幷保留了用行星及其他天体

的符号表示星期中的相应日期，这些符号至今在天文学中記載观測日期时还被采用。例如：

⊙表示太陽和星期日；

☾表示月亮和星期一；

♂表示火星和星期二；

☿表示水星和星期三；

♃表示木星和星期四；

♀表示金星和星期五；

♄表示土星和星期六。

§36. 內插法·簡易內插法

在天文計算中，經常需要应用各种用表：例如各种各样的对数表，蒙气差表以及其他專載于天文年历中的輔助天文表。在"苏联天文年历"內的許多表中，对我們特別有价值的是："太陽表"和"恒星視位置表"，关于这兩种表將在后面加以詳細叙述。

在所有这些表中，通常都是按等間距的引数值載出其相应的各种函数值。在許多表中，特別是在專門的天文表中，以时間为引数，而以天体的任一种坐标或与其类似的量为函数。它們是按等間隔的时刻刊載的。

几乎經常需要按表求出相应于任意兩相鄰引数值間的引数值的函数值。这样的做法叫做內插法。

根据所需的精度、函数变化的速度和表的結構等等，可有几种不同的內插法。茲举出其中的三种內插法：簡易內插法，每时变量內插法，二次差和高次差內插法。我們在这里只是簡單地研究一下这几种方法。若想更詳細的研究这一問題，可参考專門著作（如M.K.文采里著：內插法，莫斯科，1927年版）。

我們几乎处处（譬如按对数表查对数）都要用到的最普通的和

最簡單的內插法叫做簡易內插法。在此我們假設，函数在相应于两个相鄰引数值的兩个表列函数值間的变化是与相应的引数变化成比例的。

因此，問題就归結于从相应的比例式中求出相应于引数变量的函数变量，并將其加于該函数的前一表列函数值內，便得所求的函数值。

为了便于計算，在这些表中常載有函数的表列变量，或通常所謂表差。表內还經常載有算好的比例数，卽所謂比例部分。

設某兩个相鄰引数值 t_0 和 t_1 的函数值为 $f(t_0)$ 和 $f(t_1)$，兩者之差(表差)等于 Δ，現要用簡易內插法求出位于表列引数值 t_0 和 t_1 間的引数值 t 的函数值 $f(t)$，卽

$$t_0 < t < t_1.$$

我們在表中所要用到的部分，大致可用下列格式表示为：

引　　数	函　　数	表　　差
t_0	$f(t_0)$	Δ
t_1	$f(t_1)$	

那末，很明显，

$$f(t) = f(t_0) + x,$$

式中 x 为所求的函数变量。然后由下列比例式

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

中求得

$$x = \Delta \frac{t - t_0}{t_1 - t_0},$$

或

$$x = \Delta \times n,$$

式中 n 为不名数，卽所謂的內插因子；显然它是按下列公式求得的：

$$n = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}. \qquad (124)$$

时間間距 $t_1 - t_0$ 对一定的表来說是一常数，它称为表間距。

$t-t_0$ 称为内插时間間距或内插間距。可以說，内插因子 n 是内插間距与表間距之比。

最后可写为：
$$f(t)=f(t_0)+\Delta\times n, \tag{125}$$
按前式，
$$\Delta=f(t_1)-f(t_0). \tag{126}$$

应注意到，在内插时，为了構成表差，总是由后面的函数值减去前面的函数值。(124)、(125)和(126)三式是簡易内插公式。

§37. 每时变量内插法

在"苏联天文年历"的基本的天文表中，几乎总是以时間为引数的，总是以表内某些函数的每时变量代替表差Δ的，因为用每时变量进行内插更为精确。

我們来确定什么是时变量 v。一般說来，上述表中所載的函数不是均匀地变化的，这可从表差的变化中看出；因此，函数变化的速度也是一个变量。但是，若我們計算出函数从瞬間 t 开始的一小时内变化多少——假設函数从該瞬間起以开始时所达到的速度均匀地变化着——则可求得函数在該瞬間的每时变量 v。

可以簡單地說，每时变量 v 是函数 $f(t)$ 在某一瞬間的真每时变化速度。

从这些定义可以看出，每时变量 v 不是别的，而是就某一引数值即就瞬間 t 所計算出来的导数，而且令表示自变数的單位为一小时。若采用以前的符号，则可以写出下列公式：

$$v=f'(t)=\frac{df(t)}{dt}, \tag{127}$$

式中 t 以小时表示。

因此，函数 $f(t)$ 在某一瞬間 t 的每时变量 v 是此函数以該瞬間所具有的速度在一小时内的变化。

同以前相似，我們將表中載有每时变量的部分表示如下：

引　数	函　数	每时变量
t_0	$f(t_0)$	v_0
t_1	$f(t_1)$	v_1
t_2	$f(t_2)$	v_2

并求出在中間瞬間 t 时的函数值，在此 $t_0<t<t_1$。

若每时变量 v 为一常数，則在將时間間隔 $t-t_0$ 以时和时的小数表示，并乘以 v，以后很容易算出函数的未知值，即：

$$f(t)=f(t_0)+vh, \tag{128}$$

式中 h 为不名数，按下式求得：

$$h=(t-t_0)^{(h)}.$$

式中符号$^{(h)}$表示$(t-t_0)$是以时和时的小数表示的。

显然，一般說来 v 是一个变数。在这种情形下，我們仍可按(128)式計算，但此时我們应將 v 看作是平均每时变量，它等于 $t-t_0$ 时間間隔內函数每小时的平均变化速度。

因此，我們的問題就可归結于求由 t_0 至 t 的时間間隔內每时变量的平均値。在解算这个問題时，我們假設的不是函数本身，而是函数的每时变量在其兩个表列値間的变化与时間成比例。这一假設使我們有可能采取在时間間隔 $t-t_0$ 內的平均每时变量等于該时間間隔始末兩瞬間的每时变量之半和，即：

$$v=\frac{1}{2}(v_0+v_t),$$

式中 v_t 表示在瞬間 t 的每时变量。这一假設也使我們能够用簡易內插法来求出 v_t 之値。

利用前节的(124)、(125)和(126)三式得出：

$$v_t=v_0+\frac{Dh}{24},$$

由于在此場合下应該：

$$f(t)=v_t, \qquad f(t_0)=v_0,$$

$$\Delta=v_1-v_0=D, \qquad n=\frac{t-t_0}{t_1-t_0}=\frac{h}{24},$$

因为$t-t_0=h$，而t_1-t_0在天文表中通常等于一日或24小时。所以

$$v=\frac{1}{2}(v_0+v_t)=\frac{1}{2}\left(v_0+v_0+\frac{Dh}{24}\right)=v_0+\frac{Dh}{48}.$$

因此，每时变量的內插問題的解决可用(128)式，

$$f(t)=f(t_0)+vh,$$

和下列各公式:

$$h=(t-t_0)^{(h)}, \tag{129}$$

$$v=v_0+\frac{Dh}{48}, \tag{130}$$

$$D=v_1-v_0 \tag{131}$$

解算。

若有一定的表，和給出的具体的瞬間t，則以t_0直接表示在t之前的表列瞬間，而以t_1直接表示在其后的瞬間。因为按(128)式及其以下諸式进行內插时，我們是从t_0向t运算的，在此，$t>t_0$，即沿表按时間的进程向前运算的，所以这种內插法称为**向前內插法**。

有时，不是采用时刻t前一个表列瞬間为t_0，而是**取距t最近的瞬間作为t_0**，并不顧問瞬間t是在t_0之前或其后。

若t位于t_0之后，即

$$t>t_0,$$

則此即为上述的向前內插法。若t位于t_0之前，即

$$t<t_0,$$

則此即为所謂的**向后內插法**。在必要的情况下，采用向后內插法时，只允許达到內插間距小于表間距的一半，即因子h的絕对值总应小于12，**也**就是

$$|h|<12.$$

对于t_0以前的瞬間及其有关的量，我們以帶負号(−)的脚符号表示，而对于t_0以后的瞬間及其有关的量仍保持原有符号，但

引　数	函　数	每时变量
t_{-2}	$f(t_{-2})$	v_{-2}
t_{-1}	$f(t_{-1})$	v_{-1}
t_0	$f(t_0)$	v_0
t_{+1}	$f(t_{+1})$	v_{+1}
t_{+2}	$f(t_{+2})$	v_{+2}

是为了明确起見，我們將其用正号(＋)标示出来。此时，作業表可表示为左面的形式：

不难看出，我們所推导出来的公式，当同时应用向前和向后內插时，只需在某些地方稍加改变卽可：

$$f(t)=f(t_0)+vh, \tag{128'}$$

$$h=(t-t_0)^{(h)}, \tag{129'}$$

$$v=v_0+\frac{D_{\pm1}h}{48}, \tag{130'}$$

$$D_{+1}=v_{+1}-v_0,$$

$$D_{-1}=v_0-v_{-1}. \tag{131'}$$

这样，(128)和(129)二式沒有改变；只是在向后內插时，按(129)式計算的 h 为負値，因为此时 $t<t_0$。

在以后必須注意这一符号，特别是在計算(128′)式中的乘积 vh 的时候。在(130′)式中，当向前內插时，取用 D_{+1}，向后內插时取用 D_{-1}。(131′)式是根据前节末尾所述的規則写出的，按照这个規則，对于求表差来說，总是由后一函数値减去前一函数値。向后內插法有时候有一些实际好处，它能給出較为精确的結果。这是由于当从最近的瞬間进行內插时，h 的絕对値总是比較小的，因为我們經常有：

$$|h|<12,$$

假如經常只用向前內插法，那么，有可能

$$|h|>12.$$

因为所有的 v_0、v_{-1}、v_{+1}、$D_{\pm1}$ 和 v 各値都含有凑整誤差，所以乘积 $D_{\pm1}h$ 和 vh 在 $|h|$ 較小时，因凑整誤差而产生的誤差就要小一些。

这可以簡述为：無論是向前內插或向后內插，h 較小时，所产生的凑整誤差的累积通常要小一些。

§38. 高次差內插法

較詳細地談一下內插法的理論。

一般的內插問題可簡述为：

已知某些引数値的函数値，求任一新引数値的函数値。

为了精确地解决这一問題，必須知道函数解析式为何。函数的解析式或者是不知道(經驗函数)，或者是我們所要知道的函数关系对于直接应用来說太复杂。

为了解决这一問題，通常采用近似关系代替实际关系。所給假設的規律性在某些場合可以証实，而在另一些場合則仅仅是一种可能性。假定所研究的函数可以在已知引数値 $x=a$ 的某类域內展成台劳級数，即展成差 $x-a$ 的冪級数，幷假定这个級数是均匀地遞增的，就是說，如果我們將該級数于 $(x-a)^k$ 項处截断，則誤差不超过某个預定的微小值 ε。

因而，假設

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_k(x-a)^k, \qquad (132)$$

以 k 次冪的多項式表示我們的函数。若我們求得了系数 A_0、$A_1\cdots A_k$，則当 a 为已知时，对在上述鄰域內任一个 x，便可求得具有足够精度的 $f(x)$ 之值。

因此，問題就归結于求 (132) 式的系数。我們有 $k+1$ 个未知系数；就是說，若已知 $k+1$ 个引数値的函数値，則依次將其代入 (132)式，得 $k+1$ 个与未知系数有关的綫性方程式，这样問題就解决了。

但是，为了便于进一步解决这一問題可將 (132) 式作一換算，設

$$x=a+nw, \qquad (133)$$

式中 n 不問其为整数或分数、正数或負数，它总是一个不名数；而 x、a 和 w 是同名称的有名数。由(133)式得：

$$x-a=nw,$$

將其代入(132)式，則得：

$$f(x)=f(a+nw)=A_0+A_1wn+A_2w^2n^2+\cdots+A_kw^kn^k.$$

引入符号：

$$A_0=a_0,\quad A_1w=a_1,\quad A_2w^2=a_2,\ \cdots,\quad A_kw^k=a_k.$$

此时，可將前一公式改写为：

$$f(x)=f(a+nw)=a_0+a_1n+a_2n^2+\cdots+a_kn^k. \tag{134}$$

式中 $f(x)$、a_0、a_1、$a_2\cdots$为某一名称的有名数；x、a、w、为另一名称的有名数；n 是由下式决定的不名数：

$$n=\frac{x-a}{w}, \tag{135}$$

式中 w 是一个任意数，但为一常数。

我們已經根据(133)式和(135)式將各变数进行了代换，卽已采用了通常称为內插引数的新独立变数 n 来代替 x。

若(132)式是在一定的引数值 $x=a$ 附近均匀地遞增的級数，則(134)式是在引数值 $n=0$ 附近均匀地遞增的級数。因此，我們在下面只应加一个限制：卽 n 虽可采用与引数 x 的任意值相应的任何数值，但兩个引数值都应存在于在(132)和(134)級数均匀遞增的区域內。

在內插理論中通常所見的有兩种情况：

1) 函数值是对各种任意的不等間距的引数值給出的，于是我們就应該用不等間距的內插公式(如拉格朗奇公式)；

2) 函数值是按連接着的等間距 x 或按連接的等間距 n 刊載的，卽按組成算术級数的諸数刊載的。在下面，我們只就这一种情况来研究。

在內插法的理論和实踐中，当引数值的間距相等时，除个别函数值外，还必須与各連續函数值之差及这些差之差或所謂二次差及高次差發生关系。

假設已知引数 x 的許多等間距值：x_1、x_2、$x_3\cdots$，并且每个值都相应地有一 n 值：n_1、n_2、$n_3\cdots$和一个函数值 $f(a+nw)$。

設

x_0	$x=a$	$n=0$	$f(a)$
x_1	$x=a+w$	$n=1$	$f(a+w)$
x_2	$x=a+2w$	$n=2$	$f(a+2w)$
x_3	$x=a+3w$	$n=3$	$f(a+3w)$
$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$	$\cdots\cdots$

在上表的每一列中所載的是互相对应的 x、n 和 $f(x)$之值。显然：

$$x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=w,$$

这就是說，这些連續引数值之差是表中的間距 w。換句話說，

$$x_1=x_0+w,\quad x_2=x_1+w,\quad x_3=x_2+w,\cdots$$

所載的 x 都有一整数 n 与之相应；某一 x 將与 $n=0$ 相应；这就是 $x_0=a$；n 也可能是負的。

为了書写簡便起見，引入下列符号：

函数 $f(a)$以 f_0 表示；

函数 $f(a+w)$以 f_{+1} 表示；

函数 $f(a+2w)$以 f_{+2} 表示；

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

函数 $f(a+nw)$以 f_{+n} 表示。

函数差 f_1-f_0 以 $\Delta'_{+\frac{1}{2}}$ 表示，

一般，函数差 $f_{n+1}-f_n$ 以 $\Delta'_{+\frac{2n+1}{2}}$ 表示。

高次差也以类似的符号来表示，即差的脚符号等于导函数或差的脚符号的半和。

我們將各引数值和与它相应的函数值以及連續的各次差合并如下表，此表称为基本表或原始表，又称內插表：

$$
\begin{array}{lllllll}
x_0 & n=0 & f_0 & & & & \\
 & & & \Delta'_{+\frac{1}{2}} & & & \\
x_1 & n=1 & f_{+1} & & \Delta''_{+1} & & \\
 & & & \Delta'_{+\frac{3}{2}} & & \Delta'''_{+\frac{3}{2}} & \\
x_2 & n=2 & f_{+2} & & \Delta''_{+2} & & \Delta^{IV}_{+2} \cdots \\
 & & & \Delta'_{+\frac{5}{2}} & & \Delta'''_{+\frac{5}{2}} & \\
x_3 & n=3 & f_{+3} & & \Delta''_{+3} & & \Delta^{IV}_{+3} \cdots \\
 & & & \Delta'_{+\frac{7}{2}} & & \Delta'''_{+\frac{7}{2}} & \\
x_4 & n=4 & f_{+4} & & \Delta''_{+4} & & \Delta^{IV}_{+4} \\
 & & & \Delta'_{+\frac{9}{2}} & & \Delta'''_{+\frac{9}{2}} & \cdots \\
x_5 & n=5 & f_{+5} & & \Delta''_{+5} & & \\
 & & & \Delta'_{+\frac{11}{2}} & & \cdots & \\
x_6 & n=6 & f_{+6} & & \cdots & & \\
 & & & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & &
\end{array}
\qquad (136)
$$

此表的特点如下：

1）在任一行中，脚符号由上至下逐列增加 1；

2）一次差 Δ' 填写在(136)表中函数右面的一行中，并且在两相应函数的中間列上；

3）在构成各差数时，总是由后一函数值减去前一函数值，例如：

$$f_{+1}-f_0=\Delta'_{+\frac{1}{2}},$$

$$f_{+2}-f_{+1}=\Delta'_{+\frac{3}{2}};$$

4）同时，差的脚符号总是等于函数脚符号的算术中数：

$$f_{n+1}-f_n=\Delta'_{\frac{2n+1}{2}}.$$

因此，所有一次差的脚符号都是分子为奇数的分数，例如 $\Delta'_{+\frac{17}{2}}$；因为 $17=2n+1$，所以 $n=8$；因而，

$$\Delta'_{+\frac{17}{2}}=f_{+9}-f_{+8}.$$

为了求二次差，由后面的一次差减去前面的一次差；二次差以符号 Δ'' 表示，并写在两个一次差的中間一列上；其脚符号恰好等于一次差脚符号的算术中数。例如：

$$\Delta'_{+\frac{3}{2}}-\Delta'_{+\frac{1}{2}}=\Delta''_{+1},$$

$$\Delta'_{\frac{21}{2}}-\Delta'_{\frac{19}{2}}=\Delta''_{10},$$

$$\Delta'_{\frac{2n+1}{2}}-\Delta'_{\frac{2n-1}{2}}=\Delta''_{n}.$$

因此，二次差的脚符号与同一列中的函数脚符号相适应。一般：

$$\Delta_n^{(k)}=\Delta_{n+\frac{1}{2}}^{(k-1)}-\Delta_{n-\frac{1}{2}}^{(k-1)},$$

式中 $\Delta^{(k)}$ 和 $\Delta^{(k-1)}$ 分别标示 k 次和 $(k-1)$ 次差。

在内插时，通常应用两个相邻的同次差的**算术中数**。算术中数表示如下：

$$f_n^{(k)}=\frac{1}{2}\left(\Delta_{n+\frac{1}{2}}^{(k)}+\Delta_{n-\frac{1}{2}}^{(k)}\right),$$

即用表示函数的符号表示，并且上角符号与差之上角符号一致，而脚符号则为这些差的脚符号的算术中数。

算术中数或另称之为**半和**，塡写在表(136)中的同一行内差与差的中間；有时，为了与同次差有所区别起見，用括弧加以括起来。

差的几个特性如下：

1) 設已知 m 个函数値；显然，一次差的个数要少 1，卽 $(m-1)$ 个，二次差再少 1，卽 $(m-2)$ 个，依此类推，因而該表向右形成楔形。

2) 在(136)表中的任一差行的各数之和等于其前一行的首末两数之差。

3) 若給予任一函数値一个增量 ε，則有两个一次差、三个二次差、四个三次差……發生变化。这可用下表說明：

a_1	b_1	c_1	d_1	$e_1+\varepsilon$
a_2	b_2	c_2	$d_2+\varepsilon$	$e_2-4\varepsilon$
a_3	b_3	$c_3+\varepsilon$	$d_3-3\varepsilon$	$e_3+6\varepsilon$
a_4	$b_4+\varepsilon$	$c_4-2\varepsilon$	$d_4+3\varepsilon$	$e_4-4\varepsilon$
$a_5+\varepsilon$	$b_5-\varepsilon$	$c_5+\varepsilon$	$d_5-\varepsilon$	$e_5+\varepsilon$
a_6	b_6	c_6	d_6	
a_7	b_7	c_7		
a_8	b_8			
a_9				

表內 a_1、a_2、$a_3\cdots$为函数値，b_1、b_2、$b_3\cdots$ 为一次差，c_1、c_2、$c_3\cdots$为二次差，等等。由上表可以看出：当差变化时，其系数是二項式的系数，卽二項式 $(x-a)^k$ 展开式中的系数，此处 k 为差的相应次数。

差的这一特性有着实际的意义。它是檢查和改正一切用表、星表等等的計算結果的手段，但只有当其中的誤差不太多时才能如此。

4）若函数为 k 次幂的多項式，則 k 次差为常数。

例如令 $k=1$，則

$$f_n=a_0+a_1\times n$$

和

$f_0=a_0$	
	$\Delta'_{\frac{1}{2}}=a_1$
$f_1=a_0+a_1$	
	$\Delta'_{\frac{3}{2}}=a_1$
$f_2=a_0+2a_1$	
	$\Delta'_{\frac{5}{2}}=a_1$
$f_3=a_0+3a_1$	
…………	…………

因而，$\Delta'=$常数。

其次，設 $k=2$，則

$$f_n=a_0+a_1n+a_2n^2,$$

以及

$f_0=a_0$		
	$\Delta'_{\frac{1}{2}}=a_1+a_2$	
$f_1=a_0+a_1+a_2$		$\Delta''_1=2a_2$
	$\Delta'_{\frac{3}{2}}=a_1+3a_2$	
$f_2=a_0+2a_1+4a_2$		$\Delta''_2=2a_2$
	$\Delta'_{\frac{5}{2}}=a_1+5a_2$	
$f_3=a_0++3a_1+9a_2$		$\Delta''_3=2a_2$
	$\Delta'_{\frac{7}{2}}=a_1+7a_2$	
$f_4=a_0+4a_1+16a_2$		…………
	…………	
…………		

因而，$\Delta''=$常数。

然后，假設 $k=3$，則

$$f_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3,$$

以类似的方法得

$$\Delta''' = \text{常数},\text{等等}。$$

假設 k 次差为常数，即 $\Delta^{(k)}=$ 常数，则我們一方面可取 $\Delta^{(k-1)}=0$，而另一方面，可假定 $\Delta^{(k-1)}$ 与引数有綫性关系（簡單的比例关系）。

其中，正如我們所知道的那样，

若 $\Delta'=$ 常数，则 $\Delta''=0$，$f_n = a_0 + a_1 n$；

若 $\Delta''=$ 常数，则 $\Delta'''=0$，$\Delta' = a_0 + a_1 n$，等等。

我們現在来討論內插公式的推导。为此，我們根据(134)式

$$f(a+nw) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_k n^k,$$

以对 n 的 k 次幂的多項式为函数的表达式。

在实綫中，一般在采用(134)式时，假設 k 等于 1 或 2，有时假設其为 3，但很少假設其为 4。大的数值几乎永远是不用的。根据这一論述，我們在下面的推算中，可以設 $k=2$，即將(134)式改写为下列形式：

$$f(a+nw) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2. \tag{137}$$

因此，根据上面所述，我們可以假設：

$$\Delta'' = \text{常数}, \quad \Delta''' = 0.$$

我們首先推导牛頓的內插公式。

显然，我們的任务就在于求出(137)式的未知系数：a_0，a_1 和 a_2；也就是說一共要求出三个系数。根据上述，我們假設(137)式所表示的函数有三个值，它們与下面三个引数值相应，即：

$$n=0, \quad n=1, \quad n=2.$$

这可用下列格式表示。已知：

$n=0$	f_0
$n=1$	f_{+1}
$n=2$	f_{+2}

表內 f_0、f_{+1}、f_{+2} 为函数 $f(a+nw)$ 的三个已知値。

解算这个問題仍采取同样的方法，即將(134)式于任一項处截断。其解算步驟如下。

將 n 和 f_n 的各个相应値代入(137)式，得出与 f_n 的已知値同个数的方程；其中未知数为所求的系数 a_0、$a_1\cdots$；由所得的方程中消去未知系数，即以后面的每一方程减其前一方程，对这样所得的方程繼續进行演算，直到差数認定为常数止，在此至二次差止。此一解算可以用下列格式表示：

I	II	III
$f_0=a_0$		
$f_1=a_0+a_1+a_2$	$\Delta'_{+\frac{1}{2}}=a_1+a_2$	$\Delta''_{+1}=2a_2$
$f_2=a_0+2a_1+4a_2$	$\Delta'_{+\frac{3}{2}}=a_1+3a_2$	

因为根据假設 $\Delta''=$ 常数，所以二次差的脚符号可以完全不写。

下一步的解算是不說也知道的，即由 III 行的方程中决定 a_2；再將其代入 II 行的第一个方程求得 a_1；由 I 行的第一个方程得出 a_0。

因此，

$$a_2=\frac{1}{2}\Delta''_{+1},\quad a_1=\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\Delta''_{+1};\quad a_0=f_0.$$

再將所得的値代入(137)式：

$$f(a+nw)=f_0+\left(\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\Delta''_{+1}\right)n+\frac{1}{2}\Delta''_{+1}n^2.$$

其实，問題現已解决了。但为了更切合实用，最好將含有同样 Δ 的項放在一起，并按增序进行排列，即：

$$f(a+nw)=f_0+n\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)\Delta''_{+1},$$

最后得，

$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\Delta''_{+1}. \tag{138}$$

这就是牛顿的二次差內插公式。

如果我們在(134)式中多取几項，則以类似的方法可以得出：

$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\Delta''_{+1}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\Delta'''_{+\frac{3}{2}}+\cdots \qquad (139)$$

因而，在牛頓的內插公式中，各个 Δ 的系数都是二項式的系数，Δ 的頂符号是逐漸增加的，而脚符号則每次增加$\frac{1}{2}$，也就是說，在該公式中包含着原始表［表(136)］中向下斜的一切差数。这一点是該公式的缺陷，因为它使該公式与函数的起算值 f_0 成不对称的形式，并过分使其隨着差次的增高逐漸向下远离函数的起算值，这一点对于在任何使用表各頁的末端进行內插时表現为更不方便。

在这方面，最方便的是**斯特林內插公式**，我們現在来推导这个公式。

在这个公式中，包含有与函数的起算值 f_0 同列的一切差及半和，这就是說，所有的脚符号均为零。为了推导这个公式，假設(137)式是我們重新求得的，但只假設有三个与引数值

$$n=-1,\ \ 0,\ \ +1$$

相应的函数值。

于是，設已知：

$n=-1$	f_{-1}
$n=0$	f_0
$n=+1$	f_{+1}

按上述方法处理，即可求得：

I	II	III
$f_{-1}=a_0-a_1+a_2$		
	$\Delta'_{-\frac{1}{2}}=a_1-a_2$	
$f_0=a_0$		$\Delta''_0=2a_2$
	$\Delta'_{+\frac{1}{2}}=a_1+a_2$	
$f_{+1}=a_0+a_1+a_2$		

構成一次差的半和 f'_0。

$$f'_0=\frac{1}{2}(\Delta'_{-\frac{1}{2}}+\Delta'_{+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}[(a_1-a_2)+(a_1+a_2)]=a_1,$$

即

$$a_1=f'_0.$$

由 III 行的方程中求得:

$$a_2=\frac{1}{2}\Delta''_0,$$

而由 I 行的第二个方程中求得:

$$a_0=f_0.$$

將所得的諸值代入(137)式,最后求出:

$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}f'_0+\frac{n^2}{1\times2}\Delta''_0. \tag{140}$$

这就是斯特林的二次差內插公式。

假如在(134)式中多取几項,則同样可以求得:

$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}f'_0+\frac{n^2}{1\times2}\Delta''_0+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\times2\times3}f'''_0+\cdots \tag{141}$$

現在我們再来推导白塞尔的內插公式。

在該公式中,除了第一項 f_0 外,在所有各項中都含有与一次差 $\Delta'_{+\frac{1}{2}}$ 同列中所載的差及半和,也就是說,所有的脚符号都为 $\frac{1}{2}$。为了推导这一公式,我們可以利用方才推出的(140)式。

为了以 $\Delta'_{+\frac{1}{2}}$ 和 $f''_{+\frac{1}{2}}$ 表示 f'_0 和 Δ''_0,我們要进行下列的改化。首先根据定义写出:

$$f'_0=\frac{1}{2}(\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\Delta'_{-\frac{1}{2}}),$$

由此得:

$$2f'_0=\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\Delta'_{-\frac{1}{2}};$$

而由于

$$\Delta''_0=\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\Delta'_{-\frac{1}{2}},$$

所以,逐項相加这些等式,即可写成:

$$2f'_0+\Delta''_0=2\Delta'_{+\frac{1}{2}}.$$

由此得:
$$f_0'=\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\Delta''_0.$$

此外,因为根据差的第4个特性(参閱160頁)

$$\Delta''=\text{常数},$$

故可假設:
$$\Delta''_0=f''_{+\frac{1}{2}}.$$

顧及这一点,可將 f_0' 的关系式改写为:

$$f_0'=\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f''_{+\frac{1}{2}};$$

此时,經过适当的代換,(140)式可改为下列形式:

$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}\left(\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f''_{+\frac{1}{2}}\right)+\frac{n^2}{1\times 2}f''_{+\frac{1}{2}},$$

或
$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\left(\frac{n^2}{1\times 2}-\frac{n}{1\times 2}\right)f''_{+\frac{1}{2}},$$

或最后为:
$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}f''_{+\frac{1}{2}}. \tag{142}$$

这就是白塞尔的二次差內插公式。

假如我們取用斯特林的三次差公式,即(141)式,那末將該式用类似方法进行改化,即可得出下列形式的白塞尔公式:

$$f(a+nw)=f_0+\frac{n}{1}\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}f''_{+\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)}{1\times 2\times 3}\Delta'''_{+\frac{1}{2}}+\cdots \tag{143}$$

在內插时,总是这样的选取 a 及 f_0,以便使 n 的絕对値小于0.5,就是說,总是由最近的表列函数値进行內插,其間距須小于表列間距的二分之一。此时,可能会遇到兩种情况:

1) $n>0$——这种情况称为向前內插;

2) $n<0$——这种情况称为向后內插。

我們不談不常用的牛頓公式,而只提出斯特林公式(140)式或

(141)式，由于其各差数的脚符号皆为零，所以該公式既可用于向前內插，亦可用于向后內插。至于白塞尔公式，那末我們所推导出的(142)式或(143)式，只能用于向前內插，即 $n>0$ 时才能使用。向后內插时，必須將該式改化，使其含有帶脚符号 $-\frac{1}{2}$ 的差数及半和。完成了一切必要的計算之后，則可求得向后內插的白塞尔公式：

$$f(a-nw)=f_0-\frac{n}{1}\Delta'_{-\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}f''_{-\frac{1}{2}}-\frac{n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)}{1\times 2\times 3}\Delta'''_{-\frac{1}{2}}+\cdots \qquad (143')$$

合并兩式，可写成：

$$f(a\pm nw)=f_0\pm\frac{n}{1}\Delta'_{\pm\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}f''_{\pm\frac{1}{2}}\pm\frac{n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)}{1\times 2\times 3}\Delta'''_{\pm\frac{1}{2}}+\cdots \qquad (144)$$

此式在向前內插时一律取用上面的符号，向后內插时則取用下面的符号；在向后內插中，n 为內插引数的絕对値，这可由(143′)式明显地看出。

所有上列各式的系数或是直接算出，或是按引数 n 將其編制成表。这样的表通常或詳或略地刊載于各种数学表和天文表册中。

从这些表的研究中，可以得出有关各种公式的某些特点的結論。这样看来，斯特林公式和白塞尔公式一般是等价的。当 $0<|n|<0.25$ 时，最好是采用斯特林公式，而当 $0.25<|n|<0.50$ 时，特别是 n 的絕对値趋近 $\frac{1}{2}$ 时，最好采用白塞尔公式。

我們再来研究一个在实踐中所常用的公式。我們所考虑的这种个别場合，是在求与兩表列引数値正中間的引数値相应的函数

值。在这种場合下，我們采用中間内插法。

显然，此处：
$$n=\frac{1}{2}.$$

为了求得相应的公式，將上值代入(143)式，則得：

$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right)=f_0+\frac{1}{2}\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\times 2}f''_{+\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\times 2\times 3}\Delta'''_{+\frac{1}{2}},$$

或
$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right)=f_0+\frac{1}{2}\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}f''_{+\frac{1}{2}}. \quad (145)$$

这就是中間内插公式。虽然此公式含有的差及其半和仅到二次，但由于 $\Delta'''_{+\frac{1}{2}}$ 的系数为零，所以其精度仍然达到三次差。此公式还可改成其他形式。

利用类似上述的符号：
$$\frac{1}{2}(f_1+f_0)=f_{+\frac{1}{2}}.$$

此时
$$f_1+f_0=2f_{+\frac{1}{2}},$$
$$f_1-f_0=\Delta'_{+\frac{1}{2}};$$

將上二式相减則得：
$$2f_0=2f_{+\frac{1}{2}}-\Delta'_{+\frac{1}{2}},$$

从而
$$f_0+\frac{1}{2}\Delta'_{+\frac{1}{2}}=f_{+\frac{1}{2}}.$$

用所得的量代替(145)式中的一，二兩項則得：
$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right)=f_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}f''_{+\frac{1}{2}}. \quad (146)$$

这样，我們得出了：相应于兩个相鄰表列引数值正中間的引数值的函数值等于此兩表列引数値相应的函数值的半和减去同列的二次差半和的八分之一，并具有三次差的精度。

公式(146)形式美观，容易記忆；而公式(145)，由于其所涉及的数較小，所以較便于計算。

中間内插公式常用于下列場合：当手边用表之表間距太大，在直接应用时必須进行高次差内插的場合下。此时，最好是作一次或数次的中間内插，制一新表；根据这种新表計算时，可仅用一次差，即用普通内插法，或所謂的**簡易内插法**进行計算，簡易内插法公式載于§36。

例

求1953年10月23日世界时

$$T_0=16^h42^m33^s.3$$

瞬間太陽的赤緯。

解。由于已知瞬間靠近10月24日的子正，所以从10月24日**向后**内插。此时内插間距为：

$$24^h-16^h42^m33^s.3=7^h17^m26^s.7.$$

將内插間距$7^h17^m26^s.7$化为日的小数，即可求得内插引数n，此时最好应用"1953年的苏联天文年历"中(429頁)的表VII。依据此表很容易求得：

$$n=0.303781.$$

因此处　　$0.25<n<0.50,$

所以最好应用白塞尔公式，該公式在向后内插时其精度达到二次差，公式写为：

$$f(a-nw)=f_0-n\Delta'_{-\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{2}f''_{-\frac{1}{2}}.$$

我們由"天文年历"(18頁)中摘录出1953年10月22、23、24和25四日的太陽赤緯，并將其構成基本内插表：

	f	Δ'	Δ''	Δ'''
1953年10月22	$-10°52'16''.7$			
		$-21'12''.7$		
23	$-11\ 13\ 29\ .4$		$+10''.0$	
		$-21\ \ 2\ .7$	$(+10\ .2)$	$+0''.4$
24	$-11\ 34\ 32\ .1$		$+10\ .4$	
		$-20\ 52\ .3$		
25	$-11\ 55\ 24\ .4$			

在表内兩个二次差的中間，各写上其半和$f''_{-\frac{1}{2}}$，并且为了区别起見，將其括上括弧。

下一步的計算用計算机按下列格式进行：

补 助 表

f_0	$-11°34'32''.1$	$\Delta'_{-\frac{1}{2}}$	$-21'2''.7=-1262''.7$
$-n\Delta'_{-\frac{1}{2}}$	$+\quad 6\ 23.6$	n	0.303 781
$\frac{n(n-1)}{2}f''_{-\frac{1}{2}}$	$-\quad 1\ .1$	$f''_{-\frac{1}{2}}$	$+10''.2$
δ	$-11°28'\ 9''.6$	$\frac{n(n-1)}{2}$	-0.10574

为了方便起見，在右面輔助表內互相成对地录出必須連乘的数。白塞尔公式的系数 $\frac{n(n-1)}{2}$，可根据苏联“天文年历”（432 頁）的表 IX 求出。該式的第三項 $\frac{n(n-1)}{2}f''_{-\frac{1}{2}}$，为了不进行直接計算，可根据年历中（433 頁）表 X，“二次差改正”查出。按該表計算所得的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 之值仍为 $-1''.1$。

参閱 § 68 中二次差內插的相同例題（例 4）。

在下列場合下，应采用高差內插法：

1．按表內插——为了求得較高的精度。至于在每种特定的情况下公式应取到多少項，即应該計算到几次差，可参考下列的一般規則，这些規則是以研究不同 n 的內插公式中相应項的系数的数値而得出的（参閱“1953 年的苏联天文年历”438—439 頁）。

若二次差的絕对値不超过該表中函数的最后一位的四个單位，則其影响就不会超过該位的半个單位（不超过單位的 0.5）。

因此，在这种場合下，通常可忽略二次差的影响，而采用簡易內插法。但是，假若此时二次差都不小于最后一位的兩个單位，則由于忽略二次差，在所得結果的綜合中，因湊整誤差的緣故，会产生等于在最后一位的一个單位的誤差。因此可以說，这最后一位数是不能完全保証精确的。但是，正如上面所述的，最后一种情况大部分是能够忽略的。

若三次差的絕对値超过最后一位的62个單位，則应加以顧及。

按白塞尔公式进行內插时，若四次差不超过最后一位的 20 个單位，則可以忽略。

在計算公式的各項中不多采用一位数而要保証最后一位的精度时，則应遵守所有上述的規定。

在野外实用天文学中所遇到的許多場合中，用到二次差內插即可滿足。

2. 編制任何函数值表。例如編制作業星表，应用單中間內插法或双中間內插法；此时，若能忽視四次差的 1/43，則將公式写成 (145) 式的形式；若需要很高的精度，但是可以忽視六次差的 1/205 时，則將公式写成下列形式：

$$f\left(a+\frac{1}{2}w\right)=f_0+\frac{1}{2}\Delta'_{+\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}f''_{+\frac{1}{2}}+\frac{3}{128}f^{\mathrm{IV}}_{+\frac{1}{2}}. \qquad (145')$$

在采用單中間內插法时的制表工作，就是仅对奇数引数值的函数值按相应公式計算，而对偶数引数值的函数值，則根据(145)式或(145′)式計算，即按中間內插法計算。

有时 1、5、9、13、17 等引数值的函数值按公式計算，而后用中間內插法求 3、7、11、15 等引数值的函数值；最后按所得的許多奇数函数值，用中間內插法求出所有的偶数函数值。这样的方法称为双中間內插法。

3. 用任何一种方法把表編制好了以后，要进行“檢查并按各差調整”。为此，要把差計算到这样的次数，使它們几乎成为常数。若表的計算沒有誤差，則在表內大多数地方，这次差只因所允許的凑整誤差而彼此互异，其差异仅为最后一位的一个單位，一般說来，它的变化是緩慢而均勻的。假如表內由于計算誤差或凑整誤差的不利积累而产生了少量的有誤差的函数值，則根据差的第三个特性(見 159 頁)，它們將显示出差速的固定性或平稳性的显著破坏。因此这些有錯誤的函数值是很易發現的，同时也是很容易改正，使其固定性或平稳性得以恢复。如果在表內有許多这样的錯誤，則这些錯誤对各次差的影响的积累就会妨碍这种檢查的进

行。

§39. 天文年历·"苏联天文年历"中的太陽表

每年出版的太陽、月亮、行星和恒星的坐标表集，叫做天文年历或天文历書；年历中除了坐标以外，还有許多其他的天文資料。这种表集也常常称为天文历表。这样的年历在很多国家都有發行。

按創刊的时間而言，世界上最早的天文年历是1679年在巴黎出版的法国天文年历；其次是1767年在倫敦出版的英国航海历書；再其次是1776年在柏林出版的德国天文年历。苏維埃年历于1922年在列宁格勒开始出版。現在，它叫做"苏联天文年历"，并由苏联科学院理論天文研究所出版。

除了上述四种主要的天文年历以外，尙有在华盛頓出版的"美国天文年历及航海历書"以及在西班牙桑-勿尔郎多出版的"航海历書"。

对我們来說，最有用的是苏联天文年历，因为它是最适用于野外实用天文学的。因此，我們必須对它的許多主要部分有个詳細的了解。从方法观点上来看，最好是根据需要，按着本教程的章节逐步地对它进行了解。我們在15、17以及21至25的各节中已經概略地介紹了"苏联天文年历"中标名为"恒星平位置"的星表(参閱"1953年的苏联天文年历"134—148頁)。关于这一星表，下面我們还要作更詳細的介紹。

在§27中，我們学会了应用"北極星的地平經度和地平緯度表"(411—413頁)来計算北極星的周日近似作業星表。

現在我們来論述太陽表。关于这个表，我們在本章的29、31和36的各节中順便提到过。太陽表載于"年历"的第6頁至21頁上，并加有标題：例如，在1953年的"年历"中标名为"太陽，1953"，

而在目录中叫"太陽表"。实际上，它們就是該年的太陽历表，因为它們所載的是这一历年中每天格林尼治平子正瞬間（世界时零时）的太陽的赤道坐标和黃道坐标以及其他有关太陽的数据。这些数据中有許多是天文测量員在日常天文作業中所必須的。現在我們就来較詳細地論述一下这些表的結構和内容。

在表的左边偶数頁上載有下列各量（按行叙述）：

1）日期——月、日。

2）星期。

3）以世界时零时为准的太陽（太陽中心，即眞太陽）的地心視赤經 α．以时，分，秒表示，記載至百分之一时秒。

4）以世界时零时为准的太陽（眞太陽）的地心視赤緯 δ，以度、分、秒表示，記載至十分之一度秒，并附有符号。

5）以世界时零时为准的太陽赤緯的每时变量 v，以度秒表示，記載至百分之一秒；每时变量的符号記于該行的首尾；若每时变量的符号在一頁当中有所变动，則在符号發生变动的数字間划一横綫（—），在这种情况下，位于行首的符号乃是关系于此横綫以上的各个数值的，而位于行尾的符号則是关系于此横綫以下的各个数值的。

6）太陽的視角半徑 $R_{\odot}$，以度的分、秒表示、記載至百分之一秒。

7）以世界时零时为准的輔助量"时差$+12^h$"，即 $12^h+\eta$；此量在"天文年历"中叫做"太陽对格林尼治子午圈的时角"，并以字母 T° 来表示，这是不恰当的①。在此它以时、分、秒、表示，記載至百分之一时秒，并用字母 E_0 来表示。

8）这一輔助量的每时变量 v，以时秒表示，記載至千分之一

① 参閱后面 §41，問題1。

秒；这也就是时差 η 的每时变量；每时变量的符号記在該欄的首尾，符号的变动用在相应的数値間划一横綫(—)加以表示。

9）格林尼治平子正恒星时(眞恒星时)S_0，以时、分、秒表示，記載至千分之一秒。

10）赤經章动，以千分之一的时秒表示；章动分为長周期章动(左边一欄)和短周期章动(右边一欄)。

"眞的"，"視的"，"地心的"，"長周期的"，"短周期的"等等定語的意义，以及"平子正恒星时"和"章动"等术語的意义將在后面加以解釋。

暫时只指出一点：时差 η 或輔助量 $E=12^h+\eta$、太陽的赤緯 δ 和它的角半徑 $R_\odot$，是我們每次整理太陽的观測結果所必需的。而时差或輔助量 E 的每时变量和太陽赤緯的每时变量，是内插时差和赤緯所必需的。在化民用时为恒星时或反算时，采用格林尼治平子正恒星时。至于太陽的赤經，則它在野外实用天文学中是不采用的。除了这个原因之外，还因为它很容易根据太陽表中的数据算得，所以在太陽表中沒有載出太陽赤經的每时变量。

实际上，因为 $\alpha_\odot=\alpha_{平\odot}-\eta$,

(参閱§31)，所以眞太陽赤經的每时变量 v_α 等于赤道平太陽赤經的每时变量减去时差的每时变量 v_η。由于赤道平太陽是沿赤道均匀地运动的，所以其赤經的每时变量是一常数，等于 $9^s.856$；而时差的每时变量等于輔助量 $E=12^h+\eta$ 的每时变量，并載于太陽表(第8行)中。因此，太陽赤經的每时变量 v_α 可按下式求得：

$$v_\alpha=9^s.856-v_\eta.$$

在太陽表的右边奇数頁上，載有下列各量：

1）日期——月、日。

2）"儒略日"。儒略日按儒略历由公元前4713年1月1日格林尼治平午正起算。这种計算法使我們能够很容易地算出相距無

論多么远的兩个日期間的平太陽日数。但在野外实用天文学中，它沒有被采用。

3）太陽的黃經和其一次差。黃經以度、分、秒表示，載至十分之一秒；一次差以度秒表示；記載至百分之一秒。

4）关系于1953.0平黃道的太陽的黃緯，以度秒表示，載至百分之一秒，幷附有符号。

5）关系于1950.0的平黃道的太陽黃緯，記載法与上行同。

6）太陽向經及其一次差。向經以天文單位表示，精确到第七位小数；一次差以第七位小数为單位。

7）太陽的黃經岁差（自回归年开始起），以度秒表示，記載至百分之一秒，幷附有符号。

8）黃經的長周期章动。記載法与上行同。

9）黃經的短周期章动。記載法亦与上行同。

10）格林尼治恒星时 0^h 的世界时。

上述各量，除了最后一量之外，主要是应用于理論天文学中，在野外实用天文学中，对有关野外天文观測处理的一般計算是不需要的。

表中最后一行所載的“格林尼治恒星时 0^h 的世界时”可用来化恒星时为民用时。

我們再重复一次，太陽表是以格林尼治子午綫为准而編制的。表間距为一平太陽日，或24平太陽小时。此表說明載于“1953年的苏联天文年历”中。其他各年的年历中，可能有所变动，这种变动通常在其序言中加以說明。

§40. 根据“苏联天文年历”解算的关于內插的几个基本問題

在本节中我們研討下列关于內插的几个基本問題。这些問題

按"苏联天文年历"的太陽表来解算。

1）計算某地民用时的已知瞬間 m_c 的太陽赤緯 δ；

2）計算某地民用时的已知瞬間 m_c 的輔助量"时差$+12^h$"，即計算 $E=12^h+\eta$，以及解算某些附帶問題。

当按"苏联天文年历"中的太陽表进行內插时，首先要將地方民用时的已知瞬間 m_c 化为格林尼治民用时或世界时的相应瞬間 T_0（"年历"中的表列时刻是按世界时載出的），而后計算內插間距。現在則分别来研究每一种情况，这里指的是要求出在精度方面多少适合于已知表精度的結果。当精度可以差一点的时候，便可以按最簡單的公式和用較少的小数位来进行計算。

問題 1. 求某年某月某日經度为 λ 的某地民用时瞬間 m_c 的太陽赤緯 δ。

按每时变量內插公式（128）—（131）进行太陽赤緯 δ 的內插。这兒公式可改写为下列形式：

$$\begin{gathered}\delta=\delta_0+vh,\\ h=(m_c\pm\lambda)^{(h)}\left.\right\}\begin{matrix}\mathrm{W}\\ \mathrm{E}\end{matrix},\\ v=v_0+\frac{Dh}{48},\\ D=v_1-v_0.\end{gathered}\tag{147}$$

在此和以后的問題解算中，通常只采用向前內插法。（147）式中的 δ_0 和 v_0 分别是太陽赤緯的表列值和它在这一天的每时变量，v_1 是第二天太陽赤緯的每时变量。（147）式中的第二式，可由（129）式变换而得。此时采用：

$$t=m_c\pm\lambda\left\{\begin{matrix}\mathrm{W}\\ \mathrm{E}\end{matrix}\right.,$$

也就是將已知瞬間化为格林尼治时，即化为世界时；并要注意到，太陽表中的表列瞬間到处都等于格林尼治地方民用时 0^h，因为此

一瞬間乃是格林尼治的半子正，即，

$$t_0=0^h.$$

为了求得 h，首先要在 $m_c\pm\lambda=T_0$ 中將时秒化为分的小数（取至 $0^m.1$，而在其他的情况中就要求更精密一些），然后將分化为时的小数（取至十分之一小时）。必須記住，(147) 式中的 h 是不名数，而所求得的乘积 vh 和 Dh 的單位与 v 或 D 的單位相同，即以度秒为單位。

在以前的天文年历中的太陽表內不載出每时变量的符号，但是符号又是很需要知道的。因此，这就在应用每时变量內插法时引起了一定的困难。然而若每时变量的符号未曾載出，則可遵照下列規則加以推測：若內插函数在某一表列間隔內是遞增的，則每时变量的符号为正；若內插函数在此間隔內是遞減的則为負。

这一規則是按照 (127) 式每时变量为函数的导数而得出的。导数的符号，由数学分析可以得知，它是隨函数的增加或減小而定。当判定一个函数的增減时，象在数学分析中那样，必須注意函数本身的符号。

对太陽赤緯的每时变量而言，可有更簡單的規則：只要注意到太陽的赤緯由冬至到夏至是遞增的，而由夏至到冬至則是遞減的（參閱 §29），也就是說，太陽赤緯的每时变量，在上半年由冬至（12月22日）到夏至（6月22日）为正，而在下半年由夏至（6月22日）到冬至（12月22日）則为負。

(147)式中的最后二式分別与(130)式和(131)式相同，不过要記住：在此，字母 v_0 和 v_1 所指的是太陽赤緯的每时变量，它是由太陽表內左边偶数頁上第五行中查取的，該行位于（太陽的）"視赤緯"行右边。

問題 2.　求某年某月某日經度为 λ 的某地民用时瞬間 m_c 的輔助量 $E=12^h+\eta$。

本題的解算与問題1相似，故公式改写为

$$E=E_0+vh,$$
$$h=(m_e\pm\lambda)^{(h)}\left\{\begin{matrix}W\\E\end{matrix}\right.,$$
$$v=v_0+\frac{Dh}{48},\tag{148}$$
$$D=v_1-v_0.$$

式中 E_0 和 v_0 分别为某日的輔助量 E 及其每时变量，v_1 是第二天 E 的每时变量。輔助量 E 的每时变量的符号，在苏联天文年历中是載出的，这已在 §39 中解釋过。假使沒有載出，則可根据剛才所述的一般規則予以确定。根据此量的变化圖（圖 56）来判定輔助量 E 或时差 η 是遞增还是遞減是既明确而又方便的方法。显然，若曲綫向上升，則輔助量是遞增的，其每时变量为正；反之，若曲綫向下降，則 $E(\eta)$ 是遞減的，其每时变量为負。

(148) 式和 (147) 式的差別仅在于第一式的不同。其余三式是一样的。关于兩組公式中的第二式应当說是完全相同的，因为当所求的 δ 和 E 是屬于同一地点和同一瞬間的时候，h 之値是相同的。同时，計算 E 时，在大多数的情况下，h 只須計算到百分之一小时。至于其中的最后二式，那只能說在符号上是相同的；并須牢記，在(147)式中的 v_0，v_1（和 v）是太陽赤緯的每时变量，而在 (148) 式中則为时差或輔助量 $E=12^h+\eta$ 的每时变量；后者的每时变量載于"苏联天文年历"(1953 年）中太陽表的第八行內（在左边的偶数頁上），其左边就是載 E 的第七行。

問題 3. 求某年某月某日 n 时区內某区时瞬間 T_n 或法定时瞬間 D_n 的太陽赤緯 δ 和輔助量 $E=12^h+\eta$。

因所求的 δ 和 E 是屬于同一瞬間的，故此二値的內插間距也是相同的；因此，正如上面所說的，h 也是相同的。h 按下列公式求得：

对区时而言 $$h=(T'_n-n)^{(h)};\tag{149}$$

对法定时而言

$$h=[D_n-(n+1)]^{(h)}.\tag{150}$$

(149)式和(150)式分别由(111)式和(119)式导出。

其次，对于太陽赤緯的內插，我們有下列已知公式：

$$\begin{aligned}\delta&=\delta_0+vh,\\ v&=v_0+\frac{Dh}{48},\\ D&=v_1-v_0.\end{aligned}\tag{147'}$$

对于 E，同样有下列已知公式：

$$\begin{aligned}E&=E_0+vh,\\ v&=v_0+\frac{Dh}{48},\\ D&=v_1-v_0.\end{aligned}\tag{148'}$$

我們还必須注意，(147′)和(148′)兩式中的 v_0, v_1 和 v，在数值上是完全不相同的量，此外單位也不相同：在(147)式中为度秒(″)，而在(148)式中为时秒(s)。

問題 4. 求某年某月某日經度为 λ 的某地真午正瞬間的太陽赤緯及輔助量 E。

在真午正瞬間，真时为 0^h，即在这种場合下：

$$t_{\odot}=0;$$

因而，(105)式 $$m_c=t_{\odot}-E$$

可采取这样的形式： $$\overline{m}_c=-E.$$

为了在計算时間的时候沒有負数(因为这是很不方便的，也是很不習慣的)，在公式的右边加上 24^h，这样，真午正的民用时为：

$$\overline{m}_c=24^h-E,$$

如上所述，$\overline{m}_c$ 是某地真午正瞬間的地方民用时。

因为在內插的时候，m_c 精确到十分之一时分已够，所以在此

可直接由"天文年历"中查取这一天的 E_0 来代替 E，也就是以該天格林尼治平子正的 E_0 凑整至十分之一时分代替 E。于是，上面的公式可写为：

$$\overline{m}_c = 24^h - E_0.$$

因此，根据上面的論述，h 的計算式可采取下面形式：

$$h = [(24^h - E_0) \pm \lambda]^{(h)} \left\{ \begin{matrix} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{matrix} \right. . \tag{151}$$

当然，此式是 δ 和 E 的共用式。进一步的計算按相应于 δ 和 E 的(147′)式和(148′)式分别进行。

問題 5. 求某年某月某日經度为 λ 的某地民用时瞬間 m_c 的太陽視角半徑 $R_{\odot}$。

利用簡易内插法求得太陽的視角半經 $R_{\odot}$。因为对于本題来說，在(124)式中；

$$t = m_c \pm \lambda \left\{ \begin{matrix} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{matrix} \right. ,$$

$$t_0 = 0^h$$

$$t_1 - t_0 = 24^h,$$

所以内插因子可按下列公式求得：

$$n = \frac{m_c \pm \lambda}{24} \left\{ \begin{matrix} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{matrix} \right. . \tag{152}$$

例

1. 求1953年10月23日卡贊地方民用时瞬間 $m_c = 19^h57^m48^s.9$ 的太陽赤緯 δ。

卡贊的經度　　$\lambda_{K} = 3^h15^m15^s.6\mathrm{E}$

本題根据(147)式按下列格式解算；

m_c	$19^h57^m48^s.9$	δ_0	$-11°13'29''.4$	v_0	$-52''.82$
$-\lambda_K$	$-3\ 15\ \ 15\ .6$	vh	$-\ \ 14\ 40\ .1$	v_1	$-52\ .40$
T_0	$16\ 42\ \ 33\ .3$	δ	$-11°28'\ 9''.5$	D	$+0\ .42$
h	16.709			$\frac{Dh}{48}$	$+0\ .15$
				v	$-52''.67$

因为10月23日在夏至和冬至之間，太陽的赤緯是遞減的，所以每时变量 v_0 和 v_1 为負。

2. 在上題的条件下，应用向后內插法求太陽赤緯。

不难看出，我們在 §27 中所推导出的向后內插的一般公式，即(128)、(129′)、(130′)和(131′)，在本題中可改写为：

$$\delta=\delta_0+vh,$$

$$h=[(m_c\pm\lambda)-24h]^{(h)}\begin{cases}W\\E\end{cases},$$

$$v=v_0+\frac{D_{-1}h}{48},$$

$$D_{-1}=v_0-v_{-1}.$$

根据这些公式并按稍加改变的格式解算：

m_c	$19^h57^m48^s.9$	δ_0	$-11°34'32''.1$	v_{-1}	$-52''.82$
$-\lambda_E$	$-\ 3\ 15\ 15\ .6$	vh	$+\ \ 6\ 22'.5$	v_0	$-52\ .40$
T_0	$16\ 42\ 33\ .3$	δ	$-11°28'\ 9''.6$	D_{-1}	$+\ 0\ .42$
T_0-24^h	$-\ 7\ 17\ 26\ .7$			$\frac{D_{-1}h}{48}$	$-\ 0\ .06$
h	$-\ 7.291$			v	$-52''.46$

用此法所得的結果与用向前內插法求得的作一比較相差 0″.1，这是由于湊整誤差的积累之故。虽然这种差异在处理太陽观测中大部分都沒有实际意义，但是本題中最好是采用向后內插法，因为在此內插間距要小一半多。

我們应当指出：向后內插的結果与二次差內插的結果是相同的（参閱 §38 中的例題 168–169 頁）。

总之，如果要求所得的太陽赤緯精确到十分之一秒，則必須很精密的計算 h，其絕对値不得大于 12^h，也就是說，旣要采用向前內插，又要采用向后內插。

对于輔助量 $E=12^h+\eta$，按每时变量內插而言，利用載于“1953 年的苏联年历”中的輔助表(445 頁)是很方便的。

应該指出，向后內插的特点，除了 h 的絕对値小于 12^h 以外，h 又是一个負値。这一特点可写为：

$$0>h>-12.$$

应当記住，經常發生这样的事情，有时按下式

$$h=(m_c\pm\lambda)^{(h)}\begin{cases}W\\E\end{cases}$$

計算 h 所得的結果能滿足于上述不等式，也就是說，有时可不必預先决定向后內插的問題。这种情况是当所在地位于格林尼治之东的时候，即 $m_c<\lambda_E$ 时才有。如果單就这一情况而言，將 h 的公式改写为：

$$h=(m_c-\lambda_E)^{(h)},$$

那就更明显了。

显然，在这种情况下，进一步的內插应該按向后內插的公式进行。

3．求 1953 年 3 月 17 日敖德薩地方民用时瞬間 $m_c=13^h49^m56^s.2$ 的輔助量 E。敖德薩的經度 $\lambda_E=2^h3^m2^s.0$E。

利用(148)式按下列格式进行計算：

m_c	$13^h49^m56^s.2$	E_0	$11^h51^m23^s.14$	v_0	$+0^s.716$
$-\lambda_E$	$-2\ 3\ 2.0$	vh	$+\ 8.46$	v_1	$+0.725$
T_0	$11\ 46\ 54.2$	E	$11^h51^m31^s.60$	D	$+0.009$
h	11.782			$\frac{Dh}{48}$	$+0.002$
				v	$+0^s.718$

因为 E 为遞增的，故每时变量 v_0 和 v_1 为正。

4．求 1953 年 11 月 15 日东京区时瞬間 $T_9=15^h56^m27^s.5$ 的太陽赤緯 δ 和輔助量 E。东京位于第九时区($n=9$)內。

应用公式(149)、(147′)和(148′)。計算格式与前例相似：

T_9	$15^h56^m27^s.5$	δ_0	$-18°21'30''.9$	v_0	$-38''.70$
n	9	vh	$-\ 4\ 27.8$	v_1	-37.89
T_0	$6\ 56\ 27.5$	δ	$-18°25'58''.7$	D	$+0.81$
h	6.942			$\frac{Dh}{48}$	$+0.12$
				v	$-38''.58$
		E_0	$12^h15^m26^s.89$	v_0	$-0^s.403$
		vh	$-\ 2.83$	v_1	-0.438
				D	-0.035
		E	$12^h15^m24^s.06$	$\frac{Dh}{48}$	-0.005
				v	$-0^s.408$

5. 求 1953 年 4 月 30 日阿斯特拉罕法定时瞬間 $D_3=11^h3^m17^s.9$ 的太陽赤緯 δ 和輔助量 E。

阿斯特拉罕位于第三时区($n=3$)內。

应用公式(150)、(147′)和(148′)按前例的格式計算:

D_3	$11^h3^m17^s.9$
$n+1$	4
T_0	7 3 17 .9
h	7.055

δ_0	$+14°36'46''.4$
vh	+ 5 26 .0
δ	$+14°42'12''.4$

v_0	$+46''.80$
v_1	+45 .70
D	− 0 .60
$\frac{Dh}{48}$	− 0 .09
v	$+46''.21$

E_0	$12^h2^m45^s.12$
vh	− 2 .39
E	$12^h2^m42^s.73$

v_0	$+0^s.346$
v_1	+ 0 .324
D	− 0 .022
$\frac{Dh}{48}$	− 0 .007
v	$-0^s.339$

6. 求 1953 年 7 月 12 日基塔布眞午正瞬間的太陽赤緯 δ 和輔助量 E。基塔布的經度 $\lambda_{E}=4^h27^m31^s.7E$。

应用公式(151)、(147′)和(148′)按下列格式計算:

E_0	$11^h54^m.6$
24^h-E_0	12 5 .4
$-\lambda_E$	− 4 27 .5
T_0	7 37 .9
h	7.632

δ_0	$+22°3'1''.0$
vh	− 2 36 .5
δ	$+22°0'24''.5$

v_0	$-20''.86$
v_1	−21 .30
D	− 0 .94
$\frac{Dh}{48}$	− 0 .15
v	$-20''.51$

E_0	$11^h54^m35^s.71$
vh	− 2 .51
E	$11^h54^m33^s.20$

v_0	$-0^s.332$
v_1	− 0 .312
D	+ 0 .020
$\frac{Dh}{48}$	+ 0 .003
v	$-0^s.329$

7. 求 1953 年 3 月 31 日塔什干民用时瞬間 $m_c=15^h59^m39^s.9$ 的太陽視角半徑 $R_{\odot}$。

塔什干的經度 $\lambda_{E}=4^h37^m10^s.8E$。

本題用簡單的內插法解算。內插因子 n 按(152)式計算。其次,由"1953 年的苏联天文年历"中(8 頁)查取我們所需要的这一天的和第二天的 $R_{\odot}$ 值,并利用內插因子 n 求出表差,然后,算出我們所需要的 $R_{\odot}$ 的变量,并將其加入 3 月 31 日的 $R_{\odot}$ 值內。

			$R_☽$	Δ
m_c	$15^h59^m39^s.9$	3月31日的	16′2″.07	−0″.28
$-\lambda_E$	− 4 37 10 .8	4月1日的	16 1 .79	
T_0	11 22 29 .1	变 量	− 0 .13	
n	0.47			

已知瞬間的 $R_☽=16'1''.94$。

§41. 由民用时化为眞太陽时和反算的問題

在本章§31內，我們已推导出了眞时和民用时的关系式，幷举例說明在精度要求不很高时这兩种时的互相換算問題的解算。現在我們就来研究怎样解算这类問題而精确到百分之一时秒，即使其具有接近"苏联天文年历"中太陽表所保証的最大精度。显然，此时主要的事情是在"苏联天文年历"中內插出具有上述精度的已知瞬間的輔助量 $E=12^h+\eta$。这就是我們在上几节中所說过的每时变量內插法。我們已經知道，为了有可能精确地按前面所推出的公式进行內插，不仅应当知道瞬間和日期(即年、月、日)而且也要知道这些資料所屬地点的經度。顧及到了这些先决条件之后，再分別地、詳細地研究这里的每一个有关問題。

問題1　求相应于某年某月某日經度为λ的某地民用时瞬間 m_c 的眞时瞬間 $t_⊙$。

首先我們应当計算內插間距，为此，要按(109″)中的末式將已知的地方民用时瞬間 m_c 化为格林尼治子午綫时("天文年历"就是按格林尼治子午綫时編制的)；其次，計算 h，幷依通常的程序按(148)式內插出 E；然后，根据(106)式，即

$$t_⊙=m_c+E,$$

計算所求的眞时瞬間 $t_⊙$。

为了計算方便起見，我們再將所有这些公式按照計算工作过程中所采用的先后次序排列如下:

$$
\begin{aligned}
h &= (m_c \pm \lambda)^{(h)} \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{cases}, \\
D &= v_1 - v_0, \\
v &= v_0 + \frac{Dh}{48}, \\
E &= E_0 + vh, \\
t_{\odot} &= m_c + E.
\end{aligned} \tag{153}
$$

研究一下下面的三种个别情况是大有好处的:

1．設需要求得相应于某年某月某日格林尼治民用时瞬間(世界时)T_0 的格林尼治真时瞬間 $t_{\odot 格}$。

因而,在此我們知道日期和 T_0, 而 $\lambda = 0$。

此时,(153)式可改写为:

$$
\begin{aligned}
h &= (T_0)^{(h)}, \\
D &= v_1 - v_0, \\
v &= v_0 + \frac{Dh}{48}, \\
E &= E_0 + vh, \\
t_{\odot 格} &= T_0 + E.
\end{aligned} \tag{a}
$$

2．其次,設需要求得相应于某年某月某日經度为 λ 的某地民用时 0 时瞬間的地方真时瞬間 $t_{\odot}$。

因而,在此我們知道日期和 λ, 而 $m_c = 0$。

此时,(153)式可改写为:

$$
\begin{aligned}
h &= (\pm \lambda)^{(h)} \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{cases}, \\
D &= v_1 - v_0, \\
v &= v_0 + \frac{Dh}{48}, \\
E &= E_0 + vh, \\
t_{\odot} &= E,
\end{aligned} \tag{б}
$$

式中 $t_{\odot}$ 是地方民用时子正的眞时。

3. 最后，設需要求得相应于格林尼治民用时子正瞬間的格林尼治眞时瞬間 $\bar{t}_{\odot格}$。

因而，在这一最后的場合中，仅有日期，而 $T_0=0$ 及 $\lambda=0$。

按公式(a)或(б)求得:

$$h=0,$$

$$E=E_0,$$

$$\bar{t}_{\odot格}=E_0,$$

或
$$E_0=\bar{t}_{\odot格}。\qquad (в)$$

由于地方眞时，正象我們所知道的那样(参閱§30)，在数値上等于由該地子午圈起算的眞太陽的时角；因而根据(в)式，載于"苏联天文年历"中太陽表內的E之表値E_0，在数値上等于格林尼治平子正的"太陽对格林尼治子午圈的时角"这在表中已有注明。

將E內插到任一地点的平子正瞬間后，根据(б)式中的末式，我們又能看到，新得的E値在数値上等于地方平子正瞬間太陽对該地子午圈的时角。

但(153)式中的末式和(a)式中的末式表明，除了地方平子正以外，若將E內插到任一民用时瞬間和包括格林尼治子午圈在內的任一子午圈，則上述的对应就不存在了，E在数値上也就不等于太陽在已知民用时瞬間对已知子午圈的时角。由于这些理由，我們認为在"天文年历"中所給予E的名称是不完全恰当的。至于說到以字母T^0来表示此値，那就更不恰当了；因为它与全苏的标准符号是不相符的，所以用T^0来表示只能引起許多的誤解。

問題 2. 求相应于某年某月某日經度为λ的某地眞太陽时瞬間$t_{\odot}$的民用时瞬間m_c。

由于"苏联天文年历"中太陽表內的輔助量E及其每时变量系就格林尼治平子正瞬間刊載的，而不是按眞子正瞬間刊載的，于是

这一問題的解算变得复杂了。这就是說，为了求得內插間距，必須知道由格林尼治平子正瞬間到已知的地方眞太陽时瞬間 $t_{\odot}$ 經过了多少平时單位。但是，（在此应当着重指出）內插間距通常只精确到 $0^m.1$。因此，为了要知道我們所必須的內插間距，就可根据所求出精度，即近似地求出相应于已知瞬間 $t_{\odot}$ 的格林尼治民用时瞬間 T_0。根据公式(109″)和(105)：

$$T_0 = m_c \pm \lambda \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{cases}, \quad m_c = t_{\odot} - E,$$

就可求得
$$T_0 = t_{\odot} - E \pm \lambda \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{cases}.$$

由于是近似計算(精确到 $0^{分}.1$)，所以在該式中可用 E_0 来代替 E，即写为：

$$T_0 = t_{\odot} - E_0 \pm \lambda \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{cases}.$$

因而，求 h 可用这样的公式：

$$h = (t_{\odot} - E_0 \pm \lambda)^{(h)} \begin{cases} \mathrm{W} \\ \mathrm{E} \end{cases}.$$

至于 E_0，則可按已知日期由"苏联天文年历"(6—20頁)中查取，并如上所述湊整到 $0^{分}.1$，(或使其达到 $t_{\odot}$ 所具有的精度)。其余的公式显然和前一問題中的公式一样。

对解算这一問題所需要的一切公式，我們按其使用次序排列之。即：

$$\begin{aligned} h &= (t_{\odot} - E_0 \pm \lambda)^{(h)} \begin{cases} W \\ \mathrm{E} \end{cases}, \\ D &= v_1 - v_0, \\ v &= v_0 + \frac{Dh}{48}, \\ E &= E_0 + vh, \\ m_c &= t_{\odot} - E. \end{aligned} \tag{154}$$

例

1. 求相应于1953年11月29日基輔民用时瞬間 $m_c=16^h47^m56^s.7$ 的眞时瞬間 $t_{\odot}$。

基輔的經度 $\lambda_E=2^h2^m0^s.6E$。

根据(153)式按下列格式解算:

m_c	$16^h47^m56^s.7$	E_0	$12^h11^m52^s.24$	v_0	$-0^s.864$	m_c	$16^h47^m56^s.7$
$-\lambda_E$	$-\ 2\ \ 2\ \ \ 0\ .6$	vh	$-\ \ 12\ .91$	v_1	$-0\ .895$	E	$12\ 11\ \ 39\ .3$
T_0	$14\ 45\ \ 56\ .1$	E	$12^h11^m39^s.33$	D	$-0\ .031$	$t_{\odot}$	$4^h59^m36^s.0$
h	14.766			$\frac{Dh}{48}$	$-0\ .010$		
				v	$-0^s.874$		

2. 求相应于1953年2月5日哈尔科夫眞时瞬間 $t_{\odot}=18^h39^m27^s.3$ 的民用时瞬間 m_c。

哈尔科夫的經度 $\lambda_E=2^h24^m55^s.7E$。

根据(154)式按下列格式解算:

$t_{\odot}$	$18^h39^m27^s.3$	E_0	$11^h45^m57^s.21$	v_0	$-0^s.214$	$t_{\odot}$	$18^h39^m27^s.3$
$-E_0$	$-11\ 45\ \ 57\ .2$	vh	$-\ \ 0\ .94$	v_1	$-0\ .181$	$-E$	$-11\ 45\ \ 56\ .3$
$-\lambda_E$	$-\ 2\ 24\ \ 55\ .7$	E	$11^h45^m56^s.27$	D	$+0\ .033$	m_c	$6^h53^m31^s.0$
T_0	$4\ 28\ \ 34\ .4$			$\frac{Dh}{48}$	$+0\ .003$		
h	4.476			v	$-0^s.211$		

§42. 恒星时与平太陽时單位間的关系·时間間隔以恒星时單位及平太陽时單位表示的公式

我們知道，恒星日比平太陽日或民用日約短4分鐘。这一差异，是由于平太陽因周年运动在天球繞軸轉动一整周的时間內(即一恒星日內)沿赤道东行約1度的緣故。假設在某一瞬間，平太陽与春分点♈重合。此事發生于3月21日春分瞬間。在这一天，对地面上某点A来說，平太陽及春分点♈都在上中天同时經过子午圈。对A点而言，在这一瞬間，同时是恒星日和平太陽日之始。在地球对春分点♈轉动了一整周以后，春分点重新回到A点子午圈，此时一个恒星日就算結束。可是，在这一日內，太陽离开春分点向东移

动了一小段弧，当恒星日結束的时候，它已不与春分点同时中天了。过一些时候，当天球轉到使太陽重新回到 A 点子午圈时，一个平太陽日才告結束。因此，平太陽日較恒星日長一段时間，这段时間就是天球要轉动一个等于量度太陽在一天內离开春分点的行程的弧所相应的角度所必需的时間段。

十分明显，第二天，太陽就离得更远一些，而平太陽日的开始也比相应的恒星日更晚一些。因为平太陽的周年运动是十分均匀的，所以很容易算出它的周年行程的哪一部分是在一年的什么时候走过的。例如，在四分之一年內，太陽离开春分点的距离为其周年行程的四分之一，即等于 90°。这就是說：經过四分之一年，平太陽的开始晚于相应恒星日六个恒星小时，因为天球旋轉 90° 恰好需要 6 个恒星小时。經过半年，差数增加到 12 个恒星小时；經过四分之三年，增加到 18 个恒星小时；經过一年，增加到 24 个恒星小时，或者說恰好增加到一个恒星日。这也是說，平太陽在一年的过程中較春分点少經过 A 点子午圈一次，即在一年中平太陽日比恒星日少一天，反过来，一年中的恒星日比平太陽日多一天。

因为我們知道：一年——所謂一回归年（这一术語的解釋見 §35）——等于 365.2422 平太陽日，所以根据前面的論述可以作出結論，在此同一年中包含有 366.2422 恒星日。

于是我們可以写出：

$$365.2422\ \text{平太陽日} = 366.2422\ \text{恒星日}。\tag{155}$$

这就是平太陽时和恒星时的基本关系式，由这一关系式可以求得其他所有的关系式。由此可以定出以恒星日表示的平太陽日的長短。为此，將(155)式兩边同除以 365.2422，即得

$$1\ \text{平太陽日} = \frac{366.2422}{365.2422}\ \text{恒星日},$$

或

$$1\ \text{平太陽日} = \left(1 + \frac{1}{365.2422}\right)\text{恒星日}。$$

以字母 μ 表示 $\frac{1}{365.2422}$，卽假設:

$$\mu=\frac{1}{365.2422}. \tag{156}$$

此时，上述等式就可改写为:

$$1\text{平太陽日}=(1+\mu)\text{恒星日}。 \tag{157}$$

因而，平太陽日較恒星日長 μ 个恒星日，或 $\frac{1}{365.2422}$ 个恒星日，或以小数 0.00274 个恒星日来表示 μ。这一差数同样可以用恒星小时、恒星分和恒星秒来表示，或最后以混合数来表示。在最后的情况下，以恒星时單位表示平太陽日比恒星日長 $3^m56^s.555$。

根据(157)式，我們同样可以写出:

$$\begin{aligned}&1\text{平太陽小时}=(1+\mu)\text{恒星小时},\\&1\text{平太陽分}=(1+\mu)\text{恒星分},\\&1\text{平太陽秒}=(1+\mu)\text{恒星秒}。\end{aligned} \tag{158}$$

而普遍式为:

$$m\text{个平太陽时單位}=m(1+\mu)\text{个恒星时單位}。 \tag{159}$$

这一公式可以用来解算这样的間題: 已知时間間隔等于 m 个平太陽时單位，求它等于多少个恒星时單位?

假定以平太陽时單位表示的时間間隔的数用字母 m 表示，而以恒星时單位表示同一时間間隔的数用字母 s 表示。这就大大地簡化了我們的書写。根据这些符号，(159)式可写为:

$$s=(1+\mu)m. \tag{160}$$

(160) 式回答了下列間題: 等于 m 个平太陽时單位的时間間隔，以恒星时为單位以数 s 表示，s 等于 $(1+\mu)m$。

(160)式最方便是写为:

$$s=m+m\mu. \tag{161}$$

$m\mu$ 叫做归算数。因此，为了要以恒星时單位表示某一以平

太陽时为單位的时間間隔，必須对 m 加上归算数 $m\mu$。

这个归算数可以直接乘得，但通常可以利用專門的表求得。这种表具有各种不同的結構。

对于精度要达 $0^s.01$ 的計算，利用載于“苏联天文年历”(参閱“1953 年的苏联天文年历”，422 頁)中的“化平太陽时为恆星时”表最为方便。

此表用直的黑粗綫分为兩部分。左边部分刊載平太陽时間間隔和归算数；归算数为这些平太陽时間間隔乘以 μ 而得到的，幷以整分整秒表示；为了要由表中找得此种归算数，必須按已知时間間隔所在的行列，在其上面及左边取其相应的分、秒数。右边部分所載的是平太陽时間間隔和其归算数；归算数記載至百分之一秒。归算数位于平太陽时間間隔行的左边一行內。我們有了要以恆星时为單位表示的平太陽时間間隔之后，首先在表的左边部分找出与此平太陽时間間隔最接近而較小的时、分、秒数，这样就可获得所求归算数的整分和整秒数。其次，由已知平太陽时間間隔內減去这一近似平太陽时間間隔，再在表的右边部分找余数，找其最接近的一个数(大数小数都可)，幷按此数不用任何內插由表中查取百分之一秒的归算数。然后，將二部分归算数合幷在一起，同加于已知的平太陽时間間隔內。以此而求得之数即为以恆星时为單位表示的已知平太陽时間間隔之数。

在“天文計算用表”中也載有这样的表(“中央測繪科学研究所論文集”，第三十期，第二版，42 頁，表 7)。

为了計算以恆星时表示的記載至千分之一秒的平太陽时間間隔所需的归算数，在“1953 年的苏联天文年历”中(424 頁)載有在結構上与上述相类似的表，其区別仅在于，以平太陽时为單位的时間間隔，在表的左边部分和右边部分都算至十分之一秒，但在左边部分尙附有一个求归算数到千分之一秒的無需內插的表。

为了計算归算数至千分之一秒，在"天文計算用表"中列有專表(№5, 40 頁)。在該表中就整时(1—24^h)数，整分 (1—60^m)数和整秒(1—60^s)数列出各归算数的数値。按此表計算时，某时間間隔的总归算数，就是按时、分、秒和十分之一秒分别由表中查取的各归算数之总和。为了解釋这些表的用法，玆引用下列各例。

例

1. 試以恒星时单位表示平太陽时間間隔 $m=14^h19^m49^s.57$，其精度要求达到百分之一秒。

解:

		归算数
	$14^h19^m49^s.57$	
	14 18 19 ························	2^m21^s
	1 30 .57 ························	0.25
m	$14^h19^m49^s.57$	$2^m21^s.25$
$m\mu$	2 21 .25	
s	$14^h22^m10^s.82$	

于是，已知时間間隔以恒星时单位表示为: $s=14^h22^m10^s.82$。

2. 試用"1953 年的苏联天文年历"中的相应表(424 頁)解算同一問題，其精度要求达到千分之一秒。

解

		归算数
	$14^h19^m49^s.57$	
	14 18 19 .2 ························	2^m21^s
	1 30 .37	
	1 27 .7 ························	0.24
	2 .67 ························	0.007
m	$14^h19^m49^s.57$ ························	$2^m21^s.247$
$m\mu$	2 21 .247	
s	$14^h22^m10^s.817$	

3. 試用"天文計算用表"(中央測繪科学研究所論文集，第 30 期，40 頁)中之第 5 表解算同一問題。精度要达到千分之一秒。

解:

		归算数
	14^h ········	$2^m\,17^s.991$
	19^m ········	$3\ .121$
	49^s ········	$0\ .134$
	$0^s.57$ ········	$0\ .002$
m	$14^h19^m49^s.57$ ········	$2^m\,21^s.248$
$m\mu$	$2\ \ 21\ .248$	
s	$14^h22^m10^s.818$	

在有一定計算修养的条件下，按"天文年历"中的表进行計算时，所有的計算通常用心算进行，而归算数 $m\mu$ 直接写入格式中。在用"天文計算用表"中的第5表册，为了簡化書写和計算，最好采用算盤进行計算。

因为民用日和平太陽日的長短完全相同，所以它們的一切同名部分，如时、分、秒的長短都完全相同。因此，以平太陽时为單位表示的时間間隔，有时也說成是以民用时單位表示的时間間隔。这种說法是完全可以的，因为它們的差异仅仅是名称的不同而已。所以(161)式还可改写为下列形式：

$$s=m_c+m_c\mu. \tag{161'}$$

現將(155)式反其順序改写如下：

$$366.2422\text{ 恒星日}=365.2422\text{ 平太陽日。} \tag{155'}$$

幷將此兩边除以366.2422，則可求得一恒星日以平太陽时單位表示是多少了。这样得下列等式：

$$1\text{ 恒星日}=\frac{365.2422}{366.2422}\text{平太陽日}=\frac{366.2422-1}{366.2422}\text{平太陽日}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{366.2422}\right)\text{平太陽日。}$$

引入符号，

$$\nu=\frac{1}{366.2422}. \tag{156'}$$

此时，上式改为：

$$1\text{ 恒星日}=(1-\nu)\text{平太陽日。} \tag{157'}$$

由等式(157′)可以看出：一恒星日比一平太陽日短 μ 个平太陽日，或 $\frac{1}{366.2422}$ 平太陽日，或 0.00273 个平太陽日，或 $3^m55^s.909$ 的平太陽时。

根据(157′)式又有：

1 恒星小时 $=(1-\nu)$ 平太陽小时，

1 恒星分　$=(1-\nu)$ 平太陽分，

1 恒星秒　$=(1-\nu)$ 平太陽秒。

普遍式：

$$s \text{ 个恒星时單位} = (1-\nu)\, s \text{ 个平太陽时單位。} \quad (162)$$

按照上述条件，(162)式可改写为：

$$m=(1-\nu)s. \quad (163)$$

(163)式回答了上述問題的反算，即回答了已知等于 s 个恒星时單位的时間間隔而求它等于多少平太陽时單位的問題。

这一回答可簡述为：已知的等于 s 个恒星时單位的时間間隔以平太陽时單位表示为数 m，它等于 $(1-\nu)s$。

通常將(163)式写为：

$$m=s-s\nu, \quad (164)$$

式中 $s\nu$ 同样也是归算数，但仅为反算用的，也就是为化恒星时为平太陽时而用的。这种換算規則可用文字表述如下：为了要以平太陽时單位表示等于 s 个恒星时單位的时間間隔，就必須由数值 s 中減去归算数 $s\nu$。这个归算数同样是依据各种形式的專門用表来計算的。例如，为了計算精确到百分之一秒的归算数，在"苏联天文年历"中列有名为"化恒星时为平太陽时"的表(參閱"1953 年的苏联天文年历"，423 頁)。表的結構与前述化平太陽时为恒星时的表相同(見同一"苏联天文年历"422頁)，在表的左边部分載有归算数的整分整秒，在右边部分可以找得归算数的十分之一秒和百

分之一秒，于是对該表的应用可不作补充說明了。但要記住一点，在此是減去归算数。在“天文計算用表”（中央測繪科学研究所論文集，第30期，第9表，43頁）中載有与此完全相同的表。

在“1953年的苏联天文年历”中(425頁)，以及在“天文計算用表”中（表6，41頁）。都載有精确到千分之一秒的归算数計算表这些表的結構完全与上述的归算数 $m\mu$ 的計算表相类似。

对于这兩个表，可作出与“1953年的苏联天文年历”中的表(423頁)的同样注釋。

例

1．試以平太陽时單位表示恒星时間間隔 $s=19^h\,47^m\,53^s.46$，其精度要达到百分之一秒。

解：

		归算数
	$19^h47^m\,53^s.46$	
	19 44 11 ······	$3^m\,14^s$
	3 42 .46 ······	0.61
s	$19^h47^m\,53^s.46$ ······	$3^m\,14^s.61$
$s\nu$	3 14 .61	
m	$19^h44^m\,38^s.85$	

于是，已知的时間間隔以平太陽时單位表示的数值 $m=19^h\,44^m\,38^s.85$。

2．試用“1953年的苏联天文年历”中的相应表(425頁)解算上題，精度要达到千分之一秒。

解：

		归算数
	$19^h47^m\,53^s.46$	
	19 44 11 .0 ······	$3^m\,14^s$
	3 42 .46	
	3 39 .7 ······	$0^s.60$
	2 .76 ······	0 .008
s	$19^h47^m\,53^s.46$ ······	$3^m\,14^s.608$
$s\nu$	3 14 .608	
m	$19^h44^m\,38^s.852$	

3. 試按"天文計算用表"("中央测繪科学研究所論文集",第30期,41頁)中的表6解算同一問題,精度要达到千分之一秒。

解:

		归算数
	19^h	$3^m\ 6^s.762$
	47^m	7 .700
	53^s	0 .145
	$0^s.46$	0 .001
s	$19^h47^m\ 53^s.46$	$3^m\ 14^s.608$
sv	3 14 .608	
m	$19^h44^m\ 38^s.852$	

和上述情况一样,在稍有計算修养的条件下,格式中長横綫以上的計算,大部分可用心算进行或用算盤进行。

根据192頁中所作的关于民用日和平太陽日長短相等的解释,可將(164)式左边略加改变,写为下面之形式:

$$m_c = s - sv. \tag{164'}$$

§43. 在不同的子午圈上的平子正恒星时

任一瞬間的恒星时,在数值上等于天体的赤經与其时角之和[(11)式],即

$$s = \alpha + t.$$

对下中天瞬間而言,[(13)式]則为:

$$s = \alpha + 12^h.$$

把最后一式应用于赤道平太陽。顧及到平太陽在下中天瞬間即为平子正这一点,則可求得平子正恒星时。平子正恒星时以字母 s_0 表示。因此,根据(13)式可写出:

$$s_0 = \alpha_{赤平\odot} + 12^h. \tag{165}$$

赤道平太陽的赤經 $\alpha_{赤平\odot}$ 等于眞太陽的平黄經,幷可按理論天文学和天体力学上的公式算得。

因为子正在整个地球上并不是同时开始的，故各地的子正恒星时 s_0 也是各不相同的。子正恒星时通常是就格林尼治子午圈計算的。格林尼治平子正恒星时以字母 S_0。表示。它載于“苏联天文年历”的太陽表中的偶数（左面）頁上的倒数第二行內（參閱“1953年的苏联天文年历”，6—20頁），每日一載，以时、分、秒表示，精度达千分之一秒。遇有必要的时候，可由此抄录。

有时只需要近似地計算平子正恒星时等于多少。一般，可以近似地采用平子正恒星时的周日变化为 4^m，精确一点可采用为 (4^m-4^s)，更精确一些可采用为 $3^m 56^s.56$。于是，知道了任一天平子正恒星时，就可計算出某种精确程度的前几天或后几天的平子正恒星时。对于粗略的近似計算，可先取太陽在分点、至点瞬間的赤經，它等于 §29 末的表中所示的小时整数，即采用春分 ♈、夏至 ♋、秋分 ♎ 和冬至 ♑ 瞬間太陽的赤經分別为 0^h、6^h、12^h 和 18^h。然后根据（156）式可以知道，这几天的平子正恒星时將分別为 12^h、18^h、0^h 和 6^h。

其次，当进行这些計算的时候，一个月內的平子正恒星时的变化可采用为 2^h，而各月均按 30 天計算。在这种計算中，誤差可能达到 $\pm 10^m$。

这种誤差的主要来源之一，就是前面引用的近似赤經是屬于眞太陽的，面不是屬于平太陽的。因为根据（100′）式很容易看出：任何瞬間的赤道平太陽赤經和眞太陽赤經之差等于該瞬間的时差，故若將（155）式改写成：

$$s_0=\alpha_{\odot}+\eta+12^h. \qquad (165')$$

則可求得具有相当精度的平子正恒星时。

同时，对于近似計算来說，完全可以假設在冬至和夏至时的时差等于 0^m，而在春分和秋分时的时差分別为 -7^m 和 $+7^m$。

于是，求得这四天的平子正恒星时如下表：

日 期	s_0
♈ — 3月21日	11^h53^m
♋ — 6月22日	18 00
♎ — 9月23日	0 07
♑ — 12月22日	6 00

利用这个表，可求得任一天的平子正恒星时，其誤差約为$\pm 2^m$。

記住 s_0（精确到整秒）等于上述各数之整值的那些日期，也許更容易些；也就是說，記住下面的这个小表較为容易。

日 期	s_0
3月23日	12^h
6月22日	18
9月21日	0
12月22日	6

若注意到夏至和冬至的日期相同（六月二十二日和十二月二十二日），而春分和秋分的日期是号数互换（三月二十三日和九月二十一日），那么記起来就更容易了。按后一表計算的精度与按前一表計算的精度相同，即約为$\pm 2^m$。

天文作業員最需要知道的是地方平子正恒星时，其精度要达到百分之一秒，有时甚至要达到千分之一秒。不过，后一种情况遇到得較少，所以我們暫且不去进一步談它。

在計算时，格林尼治平子正恒星时 S_0 按已知日期由“苏联天文年历”中太陽表內查取，其精度达百分之一秒；除此以外，还应顧及到經度为 λ 的某地的子正不是与格林尼治的子正同时到来的这一情况。

这不难理解，因为太陽在其視周日运动中，在天球上是由东向西移动的，子正首先来到位于格林尼治东边的某地 A，然后到格林尼治，最后再到格林尼治西边的某地 B。若 λ_E 和 λ_W 分别为 A 和 B 的經度，其中 A 点位于格林尼治之东，B 点位于格林尼治之西，那么，A 地的子正要比格林尼治的子正早到 λ_E 小时，而 B 地的子正則要比格林尼治的子正晚到 λ_W 小时。平太陽的赤經以及平子

正恒星时，在一年內变化 24^h；一日內变化 $\frac{24^h}{365.2422}$，即 $(24\mu)^h$；一小时内变化 $\frac{(24\mu)^h}{24}$，即 μ^h。

因而，在 λ 小时內，子正恒星时的变化就增大 λ 倍，以数表示为 $\mu^h\lambda$。

在此乘积中，λ 是無名数，而 μ^h 以秒表示，等于 9^s856。λ 以时及时的小数表示，并如上述視它为無名数，λ^h 乘以 9^s856 后，就可求得平子正恒星时的变化。求得的这一变化是以秒表示的。$\mu\lambda$ 可不用直接去乘，而可按"化平太陽时为恒星时"的表（"1953 年的苏联天文年历"，422 頁）求得，方法完全和求归算数 $m\mu$ 相同；但应牢記，这兒所求的 $\mu\lambda$ 不是归算数，而表也不是根据直接用途来使用的。

根据上面的論述，我們可以得出結論，在格林尼治东面的 A 地的平子正恒星时較格林尼治平子正恒星时少 $\mu\lambda_E$ 秒，以公式表示为：

$$s_0 = S_0 - \mu\lambda_E.$$

在格林尼治西面的 B 地的平子正恒星时較格林尼治的多 $\mu\lambda_W$ 秒，以公式表示为：

$$s_0 = S_0 + \mu\lambda_W.$$

綜合上述兩种情况（参閱 § 11），为了根据由"苏联天文年历"中查得的格林尼治平子正恒星时 S_0 来計算地方平子正恒星时 s_0，我們得出下列共同式：

$$s_0 = S_0 \pm \mu\lambda \begin{cases} W \\ E \end{cases}. \tag{166}$$

改正数 $\mu\lambda$ 通常都算到百分之一秒。

例

1．近似地求出11月3日平子正恒星时s_0。

第一近似值

9月23日秋分这一天的……$s_0=0^h$

在1个月内的变化为……　2^h

按每天4^m計算，11天内的变化为……　0^h44^m

11月3日的……$s_0=2^h44^m$

第二近似值

a）根据第一表：

9月23日秋分这一天的……$s_0=0^h7^m$

按每天(4^m-4^s)計算，41天内的变化为……　2^h41^m

11月3日的……$s_0=2^h48^m$

б）根据第二表：

9月21日秋分这一天的……$s_0=0^h$

按每(4^m-4^s)計算，43天内的变化为……　2^h49^m

11月3日的……$s_0=2^h49^m$

驗算　按"1953年的苏联天文年历"的太陽表（18頁）求得11月3日的：

$$s_0=2^h47^m50^s.$$

因此，对第一近似值而言約相差4^m，对于按第一表求得的第二近似值而言相差小于1^m，而按第二表求得的第二近似值而言相差稍大于1^m。

2．求1953年5月27日基塔布的平子正的恒星时。

基塔布的經度$\lambda_{15}=4^h.27^m.31^s.7$E。

首先按"1953年的苏联天文年历"中的表（422頁）及引数λ求得基塔布平子正恒星时的經度改正数：

$\lambda=4^h\ 27^m\ 31^s.7$

4　21　45……$0^m\ 43^s.95$

↑

5　46.7……⋮

然后按下列格式計算：

S_0	$16^h17^m\ 0^s.66$
$-\mu\lambda$	$-\ 43\ .95$
s_0	$16^h16^m\ 16^s.71$

根据(166)式，改正数 $\mu\lambda$ 应取負号，因为基塔布位于亞洲的中部，即位于格林尼治的东面。

§44. 化民用时为恒星时和反算

如果会用恒星时單位来表示平太陽时(民用时)时間間隔，并能求出平子正恒星时，那就可以解决以下的問題：即求相应于經度为 λ 的某地在已定年月日的民用时瞬間 m_c 的恒星时瞬間 s。

若某一瞬間的地方民用时为 m_c 个小时、分、秒，那就是說自民用日开始起，也就是說自地方平子正起，恰好过去了 m_c 个平民用小时、分、秒，换句話說，我們得到的是由地方民用时 0^h 到瞬間 m_c 的时間間隔，它是以平太陽时或民用时为單位的数値 m_c 个小时、分、秒表示的。首先以恒星时單位来表示这一时間間隔。为此，正象我們在 §42 中所知道的那样，必須在数 m_c 上加一归算数，归算数根据相应的表求得(參閱“1953 年的苏联天文年历”422 頁)。所求得的 $m_c+m_c\mu$ 之和告訴了我們：从平子正到已知瞬間經过了多少恒星小时、分、秒。

現在，我們根据上节所述，来求相应于某地某年某月某日地方平子正瞬間的恆星时瞬間，也就是按(166)式求 s_0：

$$s_0=S_0\pm\mu\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}.$$

現在剩下的問題只是將兩个已得的数目相加起来，便可求得相应于已知的民用时瞬間 m_c 的恒星时瞬間 s。因此，根据前面的論述，我們对于本問題的解算，就有以下的公式：

$$s=s_0+m_c+m_c\mu, \tag{167}$$

式中 s_0，正如以上所述，按(166)式求得。

(167)式經过稍加改变可成为下列形式：

$$s=S_0+m_c+T_0\mu. \tag{167'}$$

現在我們来研究这一問題的反算，即求相应于某年、某月、某日經度为 λ 的某地的地方恒星时瞬間 s 的民用时瞬間 m_c。

我們首先必須知道由民用日开始起（即自地方平子正起）到已知瞬間 s 止的时間間隔，那怕是以恒星时为單位表示的也好。为了这一目的，按一般規則，必須自表示时間間隔的終了时刻的数値中減去时間間隔开始时刻的数値。时間間隔的終了时刻为已知瞬間 s，而时間間隔的开始时刻为 s_0，s_0 是某地某日的地方平子正恒星时。因此，由已知民用日开始到已知瞬間 s 止的时間間隔，以恒星时單位表示为差 $s-s_0$。

为了要求得相应于已知恒星时瞬間 s 的民用时瞬間所剩下的問題，就是要用平太陽时（民用时）單位来表示时間間隔 $s-s_0$。根据这些論述，反算公式应为：

$$m_c=(s-s_0)-(s-s_0)\nu. \tag{168}$$

式中 s_0 是某地的平子正恒星时，它按(166)式計算，即：

$$s_0=S_0\pm\mu\lambda\begin{cases}W\\E\end{cases}.$$

于是，正算按(166)式和(167)式进行，反算則按(166)式和(168)式进行。但要注意，在第一种情况下，無論是归算数 $m_c\mu$ 或子正恒星时改正数 $\mu\lambda$，都要按“化平太陽时为恒星时”表进行計算，（參閱“1953年的苏联天文年历”，422頁）；而在第二种情况下，子正恒星时改正数当然也应按上表进行計算，但归算数 $(s-s_0)\nu$ 却要按“化恒星时为平太陽时”表进行計算（參閱“1953年的苏联天文年历”，423頁）。

有时，只需要很近似地計算相应于已知民用时瞬間的恒星时，精度只要达到若干分。为此，同样可用(167)式，只是 s_0 大半是用前节所述的方法之一近似地計算，或者直接由“苏联天文年历”中查出后作較大的湊整；而归算数 $m_c\mu$，因其微小可以完全忽略。

例

1．求相应于1953年1月12日华盛頓民用时瞬間 $m_c=14^h43^m29^s.57$ 的恒星时瞬間 s。

华盛頓的經度 $\lambda_W=5^h8^m15^s.78W$。

根据(166)或和(167)式按下列格式进行計算:

S_0	$7^h24^m45^s.71$
$+\mu\lambda_W$	$+\quad 50\ .64$
s_0	$7\ 25\ 36\ .35$
m_c	$14\ 43\ 29\ .57$
$m_c\mu$	$2\ 25\ .14$
s	$22^h11^m31^s.06$

$\lambda=5^h8^m15^s.78$
$5\ 4\ 22$
$3^m53^s.78$
$m_c=14^h43^m29^s.57$
$14\ 42\ 40$
$0^m49^s.57$

我們应当注意，改正数 $\mu\lambda$ 是正的，因为华盛頓在格林尼治之西。

在右边用以求改正数 $\mu\lambda$ 和归算数 $m_c\mu$ 的輔助格式与§42和§43中所列的格式所不同的地方，仅仅在于前者的归算数(或改正数 $\mu\lambda$)不直接記入主要格式中。

2．求相应于1953年8月25日雅典恒星时瞬間 $s=17^h39^m53^s.94$ 的民用时瞬間 m_c。

雅典的經度 $\lambda_E=1^h34^m53^sE$。

根据(166)式和(168)式按与上类似的格式解算:

S_0	$22^h11^m50^s.83$
$-\mu\lambda_E$	$-\quad 15\ .59$
s_0	$22\ 11\ 35\ .24$
s	$17\ 39\ 53\ .94$
$s-s_0$	$19\ 28\ 18\ .70$
$(s-s_0)\nu$	$-\ 3\ 11\ .40$
m_c	$19^h25^m\ 7^s.30$

$\lambda=1^h34^m53^s$
$1\ 31\ .19$
3^m34^s
$s-s_0=19^h28^m18^s.70$
$19\ 25\ 52$
$2^m26^s.70$

改正数 $\mu\lambda$ 是按“1953年的苏联天文年历”中的表(422頁)計算的。因为雅典在格林尼治之东，所以改正数取的是負号。为了能够从 s 中减去 s_0，故在 s 中加上 24^h。归算数 $(s-s_0)\nu$ 也是按同一个“天文年历”中的表(423頁)計算的。关于在主要格式右边之輔助格式，其注释与上例相同。

3．近似地計算相应于1953年5月15日民用时 $m_c=20^h40^m$ 的恒星时 s。

s_0	15^h30^m
m_c	20 40
s	12^h10^m

格式中的 s_0 是由"1953 年的苏联天文年历"(10 頁)中査得的，并湊整为整分。根据簡化后的(167)式，s 为 s_0 和 m_c 之和。因为相加所得为 36^h，但这是不可能的，故应由 36^h 中减去 24^h。

§45. 在已知民用日内兩个恒星时瞬間的次序問題

某兩个已知恒星时瞬間 s_1 及 s_2 在一已知民用日內的次序問題，是由于恒星日的开始通常不与民用日的开始相重合而产生的。因而，恒星时 0^h 可以在任一民用时瞬間出現；而民用日的开始，卽平子正与瞬間 s_0 重合，这兒 s_0 就是平子正的恒星时。大于 s_0 而小于 24^h 的恒星时瞬間就在民用日的开始部分；大于 0^h 而小于次日平子正恒星时 s_0 的恒星时瞬間就在这一天的末尾部分。这样一来，可能产生这样的情况，在一民用日內兩个已知恒星时瞬間位于恒星时 0^h 的兩側；此时，数大的恒星时瞬間較另一恒星时瞬間早到。反之，若在一民用日內的兩个恒星时瞬間在恒星时 0^h 之一側，則它們之次序是正常的。

因此，上述問題可簡述为：已知兩个恒星时瞬間 s_1 和 s_2，求其中那一个在已知民用日內較早来临？早到多少？

解答第一个問題最好采用簡解法。为此，在任意的直綫上截取一段以任意比例表示的已知民用日。綫段的兩端注記已知民用日及其次一民用日的平子正恒星时 s_0 及 s'_0。取綫段的二十四分之一表示一恒星小时，并在圖上标出这一天恒星时 0^h 的位置而后标出已知的兩个恒星瞬間 s_1 和 s_2。現在，可以根据瞬間在圖上的位置，已很明确的决定了它們的次序。为了要确定某一瞬間比另一瞬間早到多少，就必須求出它們之間的时間間隔。对此，按一般

規則，必須由时間間隔末尾的瞬間減去其开始的瞬間。

例

已知兩个恒星时瞬間 $s_1=10^h33^m$ 和 $s_2=19^h56^m$。求它們在民用日5月22日和8月31日誰先到来和先到多少时間?

就每一已知民用日作一圖。由"1953年的苏联天文年历"中查出相应的 s_0 和 s_0'。并凑整至整分、由"年历"中查得5月22日的 s_0 和 s_0':

$$s_0=15^h57^m, s_0'=16^h1^m,$$

將这些数据标于圖上(圖58)，求出恒星时 0^h。然后，再將已知瞬間 s_1 和 s_2 标于圖上。由圖可以清楚地看出，s_2 比 s_1 先到。为了要确定早到多少时間，从 s_1 中減去 s_2。

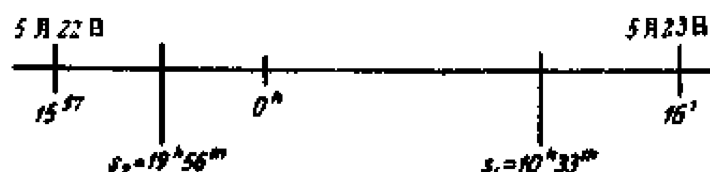


圖 58.

s_1	10^h33^m
s_2	19 56
s_1-s_2	14^h37^m

因此，在5月22日，第二个瞬間 s_2 比 s_1 早到 14^h37^m 恒星时單位。

由"苏联天文年历"中查得8月31日的 s_0 和 s_0':

$$s_0=22^h36^m,$$
$$s_0'=22^h39^m.$$

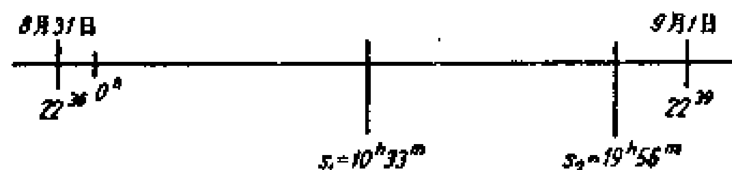


圖 59.

由圖(圖59)可以看出，s_1 較 s_2 早到。由 s_2 減 s_1:

s_2	19^h56^m
s_1	10 33
s_2-s_1	9^h23^m

因而，在8月31日，s_1 較 s_2 早到 9^h23^m。

第五章　視差·蒙气差·光行差

§46. 天体坐标的微小变化，变化的原因及其計算

由以前所述我們知道，由于天球的周日旋轉，恒星的有些坐标(z、A、t)不断地变化，而另一些坐标(α、δ、β、λ)则不变。然而也有这样一些原因，它們与天球的視轉动無关，在不同的程度上引起两組坐标同时变化。这些变化，在观測中和在以后的整理中，都是必須加以顧及的，所以我們应該研究它們的实質、原因及其計算的方法。与此有关的現象有視差、蒙气差、光行差、岁差、章动和恒星自行。

在蒙气差的情况下，坐标的变化是由于周圍环境即大气的影响所引起的；在視差的情况下，坐标的变化是由于观測者的移动所引起的。由这些現象所引起的天体坐标变化的計算方法，其目的在于將測量結果化算成某些固定的理想条件下的观測。对蒙气差而言，則化为沒有大气时的观測；对視差而言，則化为在空間一定点上的观測。至于光行差，若观測的目的在于測定恒星的坐标，則把測得的結果化为观測者对太陽沒有运动时的观測；在其他的測定中則相反，要在恒星坐标內加入与观測时观測者移动的速度有关的变化。

在岁差和章动的情况下，坐标的变化是由于太陽系內引力現象所引起的。

在这种情况下，坐标变化的計算法，乃在于將測得的結果化为在某一定瞬間的坐标系位置，这时刻是根据某种理由而选定的。

最后，各恒星在空間对地球和太陽系运动的方向和速度都是

不同的，因此它們在天球上的位置是在变化的，它們的球面坐标因而也是有变化的。这种現象叫做恒星自行。

計算恒星坐标的变化，为了將其位置化为屬于某一定瞬間或通常所說的某一历元。

上面所列举的每一种現象及其本質和計算，都將在以后的叙述中作詳細的研究。

§47. 視差·視差位移的簡明理論·周日視差

視差現象一般可定义为因观測者移动而引起的观測目标方向的变化。根据这个意义，視差是对經緯仪或万能仪等仪器中的細絲而言的。

术語"視差"，一般所指的不仅是包括观測目标方向的变化現象，而且还需指出这种变化的角值。

若观測者由 A 点移到 B 点(圖 60)，則目标 C 的方向变动了一个角度 CBC'。在圖 60 上，作 AC 的平行綫 BC'。当目标 C 位于离观測者無穷远的地方时，观測者才能在 BC' 方向上看見目标；此时，观測者又在 BC 方向上再看目标 C。因此我們可以說，这兒的視差等于 CBC' 角。但根据平行綫的性質，$\angle C'BC=\angle ACB$，而 $\angle ACB$ 为自 C 点（观測目标）对观測者的移动綫 AB 所張的角。于是，我們可以下一个視差位移的一般定义：視差等于观測目标对观測者移动綫所張的角。

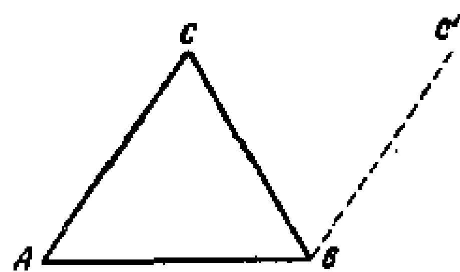


圖 60.

用几何判断也很容易証明：視差的大小取决于观測目标与观測者的距离、观測者移动的程度以及 AB 綫对方向 AC 的位置。

因为一切恒星都距我們很远，所以观測者在地球范圍內的移

动不会引起这些恒星的任何視差位移。这样的位移只發現于太陽系的天体：太陽、月亮、行星等等。

于是，由于視差現象，从地球上各点至太陽或月亮的盤面中心的各个方向互不平行，因此在地面上各点所进行的观测也就各不相同。在同一点上，但經过一段时間所进行的各次观测，也同样如此，这是因为由于地球繞軸周日轉动使点在这一段时間內移到了另一个空間位置。由于太陽系內的天体的視差現象与地球繞軸周日轉动有关，因此称它为**周日視差**。

为了使太陽或月亮的一切观测可以进行互相比較，必須預先將这些观测归算至某一点；这一点是这样选擇的，它尽可能处在使地面上一切相对的各点成对称的位置，同时它本身不参加地球的周日轉动。

很明显，这样的点是地球的中心；而太陽、月亮、行星及太陽系內其他天体的一切观测都归算到这一点。

为了对这种做法有个概念，必須設想有一个观测者，他首先在地面上某一点观测了太陽、月亮或行星，然后立即沿这一点的向徑移动到地球中心，并在那里重复和第一次同时的相同观测。

因为在实用天文学的观测中只利用太陽，所以我們在后面只論述太陽的周日視差。

§48. 太陽的周日視差，它对太陽的天頂距和方位角的影响

根据上一节末所闡述的观点，**太陽的周日視差可定义为太陽对观测地点的地球半徑所張的角**。

由于太陽的周日視差是一个小于 $9''$ 的微量，故可以把地球当作一个球体，而它的一切半徑則都看作是相等的；在任何情况下，由于这一假定所引起的誤差都小于 $0''.03$，这在太陽的观测中，当

然不会有任何实际意义的。

因为在天文測量学中的天体的方向是以它們的球面坐标决定的，所以很明显，在視差的影响下，太陽的坐标是会有变化的。中心与地心重合的天球叫做地心天球，中心位于地面上某一点的天球叫做地面天球。

屬于地心天球的坐标叫做地心坐标；屬于地面天球(假想其中心在地面某一点上)的坐标叫做地面坐标。

現在我們来研究周日視差对太陽的地平坐标（天頂距 Z 和方位角 A)的影响。

設圖 61 上的 M 是地面上的某一点，C 是地心，S 是日心。

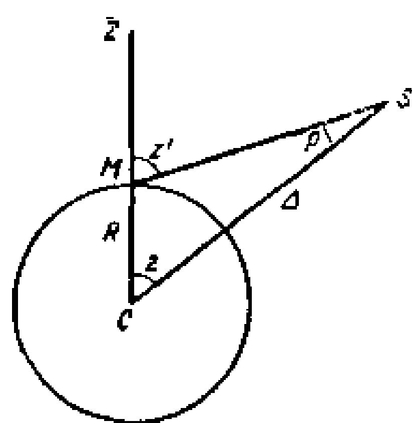


圖　61.

由 M 点看，太陽在 MS 方向，改由地心看，則太陽在 CS 方向，此兩方向間的角 MSC 以 p 表示。联接 M 和 C，并將鉛垂綫 MC 向相反方向延長，这就是天頂 Z 的方向。等于 p 的 $\angle MSC$ 是太陽的周日視差，因为它正是太陽对 MC 綫所張的那个角。MC 是假想的观測者的位移，它等于 M 点的向徑 R。$\angle SMZ=z'$ 是太陽的地面天頂距，而 $\angle SCZ=z$ 是太陽的地心天頂距。

$\angle SMZ$ 是三角形 SMC 的外角；因此，

$$z'=z+p,$$

由此我們可以根据在 M 点測得的地面天頂距和視差 p，求得地心天頂距，卽得：

$$z=z'-p. \tag{169}$$

为了求得 p，用正弦定律解平面三角形 SCM：

$$\frac{\sin p}{\sin(180^\circ-z')}=\frac{MC}{SC},$$

或

$$\frac{\sin p}{\sin z'}=\frac{R}{\Delta}, \tag{170}$$

式中 Δ 是地心到日心的距离，R 是地球的半徑。

现在我們来研究当太陽恰好在 M 点的地平綫上(圖62)的这种个別情况。此时，$\angle ZMS$ 是直角，三角形 SMC 是直角三角形。在这种情况下，$\angle MSC$ 叫做太陽的地平視差，并以 $p_{\odot}$ 表示。其余的符号和以前一样。解三角形 SMC 求得:

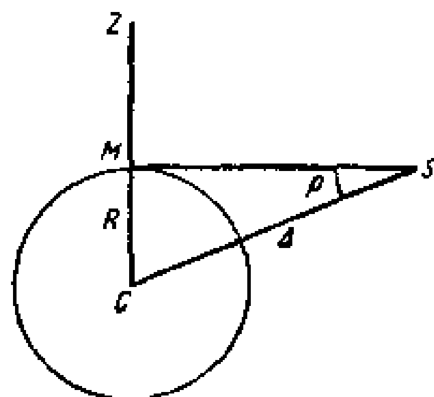


圖 62.

$$\sin p_{\odot}=\frac{R}{\Delta}. \tag{171}$$

由这一公式可以看出：地平視差取决于地球半徑和由地球到天体的距离。利用这一公式，由观测中求出太陽的地平視差，即可决定地球到太陽的距离。必須指出，太陽的地平視差平均为 $8''.8$，而地球到太陽的平均距离为 149,500,000 公里。因而，很容易理解，如果由于 $p_{\odot}$ 值很小，將公式(171)可改写为:

$$p''_{\odot}=\frac{R}{\Delta \operatorname{arc} 1''},$$

式中

$$\operatorname{arc} 1''=\frac{1}{206265}=\frac{1}{\rho''},$$

并相应地將 R 首先看作是地球的赤道半徑，然后看作是地球的極半徑，那末以此所得的太陽赤道視差値和地極視差値之間的差將是很小的。因为地球的扁率約等于 $\frac{1}{300}$，所以这个差將等于 $\frac{8''.8}{300}$，即小于 $0''.03$。关于这一点，在上面已經說过。由于地球到太陽的距离的变化，太陽地平視差値的变动也就稍許大一些。当地球在近日点时，視差为 $8''.95$；当地球在远日点时，$p_{\odot}=8''.66$，即差將大約达到 $0''.3$。当 p 計算到 $0''.01$ 甚至到 $0''.1$ 的时候，$p_{\odot}$ 之値都須从“苏联天文年历”中查取(参閱“1953 年的苏联天文年历”22 頁)。

最靠近我們的天体——月亮——具有最大的視差，其地平視差平均达 $57'$。

將(170)式和(171)式相比較，可以写成：

$$\frac{\sin p}{\sin z'} = \sin p_{\odot},$$

或者是：
$$\sin p = \sin p_{\odot} \sin z'.$$

因为 $p_{\odot}$ 和 p 都是微小量，所以它們的正弦都可以用弧来代替：

$$p = p_{\odot} \sin z'. \tag{172}$$

將(172)式代入(169)式最后得：

$$z = z' - p_{\odot} \sin z'. \tag{173}$$

上式所表示的是視差对太陽天頂距的影响。

因为 p 是微小量，故把地球当作球体。由于在圖 61 上的直綫 ZMC 是鉛垂綫，$ZMCS$ 平面，即發生一切視差位移現象的圓平面是一竪直面，所以，視差对于太陽的地平經度沒有影响。

为了計算月亮的視差，就需要有較完整而严密的理論。

有时，視差影响的計算及太陽地心天頂距的計算精确到 $0'.1$ 已足。很明显，因为，

$$p_{\odot} < 0'.15,$$

而
$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 20^\circ \approx \frac{1}{3}, \quad \sin 90^\circ = 1;$$

所以按(172)式得以分为單位的下列三个視差值 p：

当 $z' = 0^\circ$，　　$p = 0'.00$，

当 $z' = 20^\circ$，　　$p = 0'.05$(强)

当 $z' = 90^\circ$，　　$p = 0'.15$(强)

由此可以得出結論，如果精度要求达 $0'.1$ 的話，那末：

当 $z' < 20^\circ$，　　$p = 0'.0$，

当 $z' > 20^\circ$，　　$p = 0'.1$.

由这一結果可作出下列非內插性的表，当太陽地心天頂距計算精确到0′.1时，可利用此表:

z'	p
0°	
20	0′.0
90	0 .1

由(172)式可知，因 z' 而变的視差 p，是随 z' 的周日变化而周期地变化的。因此，它叫做**周日**視差。

例

1. 假設1953年8月23日由觀測得太陽的地面天頂距

$$z'=57°26'56''.7,$$

求其地心天頂距 z。

由"1953年的苏联天文年历"中第22頁上的表，查得8月23日的 $p_{\odot}$。在这种情况下，于8月18日和28日之間进行中間內插求得:

$$p_{\odot}=8''.70.$$

其次按(173)式进行計算，或按(169)式和(172)式的綜合式进行計算。

用对数表計算

z'	57°.4
$p_{\odot}$	8″.70
$\lg p_{\odot}$	0.940
$\lg \sin z'$	9.926
$\lg p$	0.866
p	7″.34

用計算机計算

z'	57°.4
$p_{\odot}$	8″.70
$\sin z'$	0.842
p	7″.33

z'	57°26′56″.7
p	− 7.3
z	57°26′49″.4

無論是用对数表計算，無論是用計算机計算，都一律采用三位数表。

这一計算，也可用对数計算尺进行。此时，用对数計算尺計算所求得的結果实际上是与前面相同的，卽7″.32。

2. 求相应于太陽的地面天頂距

$$z_1'=15°23'.2 \text{ 和 } z_2'=68°49'.7$$

的地心天頂距 z_1 及 z_2，精确到0′.1。

根据前述的表(參閱本頁)，按(173)式求得:

$$z_1 = z_1' - p_1 = 15°23'.2 - 0'.0 = 15°23'.2,$$
$$z_2 = z_2' - p_2 = 68°49'.7 - 0'.1 = 68°49'.6.$$

§ 49. 恒星的周年視差

地球上的观测者，不仅因地球繞軸自轉而随其所在地面点的轉动在空間移动，而且还因地球繞太陽周年轉动而在空間移动。后一种移动是非常大的，它使許多恒星因此而产生視差位移，但位移是很小的。这种現象叫做**恒星的周年視差**。

設在圖 63 中的橢圓 $T_1T_2T_3$ 以透視的形式表示地球繞太陽 S 的軌道。在本問題中，我們可以足够近似地把地球的軌道当作一个圓，并且把太陽当作圓心。

当地球位于軌道上的 T_1 点时，恒星 σ 被投影于天球上的 σ_1 点。若由太陽至恒星 σ 的距离与由地球至太陽的距离相比不是一个無穷大的話，則当地球移至軌道上的 T_2 点时，恒星就被投影于点 σ_2，即产生了視差位移。当地球經过 T_1 点半年后移动到与此点正相对称的 T_3 点时，产生最大的視差位移。不难确信，在一年內，恒星在天球上將描繪出一条閉合曲綫，也就是一个橢圓。在个别情况下，若恒星在黃道的極上，則橢圓变为正圓；若恒星在黃道面上，則橢圓变成了一段直綫，或者更正确的說，变成了一段黃道大圈的弧，而恒星則由于視差的緣故在其平位置的周圍有微小的变动。

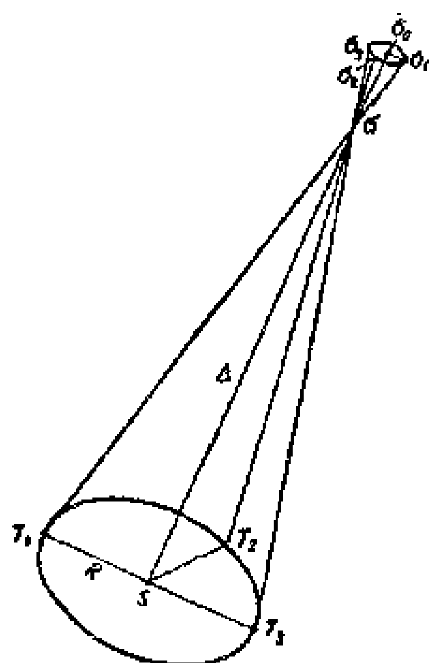


圖 63.

为数一千顆左右的少数最接近太陽系的恒星，才發現有这种

視差位移，并且是很微小的。極大多数的恒星距我們是这样的遙远，地球軌道的大小与这样的距离相比是微不足道了。这些恒星沒有發現任何視差位移，因而不仅沒有周日視差，而且也沒有周年視差。为了能够对某一具有周年視差的恒星的观测进行彼此比較，則必須將它們都归算至空間的某一点。为了方便起見，采用太陽中心作为这样的点，即圖 63 中的 S 点。用直綫 $S\sigma$ 联接 S 点和恒星 σ，求得該星在天球上的所謂的日心位置 σ_0，显然，它是小橢圓 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 的中心。

若我們选擇半徑 T_2S 使 $T_2\sigma$ 垂直于 ST_2，这是可能的，那么三角形 $ST_2\sigma$ 是一个以 T_2 为直角頂点的直角三角形。在此三角形中的直角边 $T_2S=R$ 是地球軌道的半徑，它等于一个天文單位或 149,500,000 公里；斜边 $S\sigma=\Delta$ 是由太陽至恒星的距离；$\angle T_2\sigma S$ 是假想的观測者由 T_2 点移到太陽中心时恒星視差位移的大小。因为此处的术語"周年視差"，不仅指的是整个視差現象，而且还包括視差位移的数值，所以这个角就叫做恒星的周年視差。它以字母 π 表示。因此可写为：

$$\pi=\angle T_2\sigma S.$$

由此得出这样一个定义：恒星的周年視差是恒星对垂直于地心到恒星的方向綫的地球軌道半徑所張的角。很明显，周年視差 π 等于恒星最大的半年視差位移的一半。由观測确定这种位移，从而求出恒星的視差。但是这种观測是异常困难和复杂的，因为这是有关进行微小量的測量的問題。事实上，現时在已知的恒星視差中最大的只等于 $0''.76$。

由三角形 $T_2S\sigma$（圖 63）确定：

$$\sin\pi=\frac{R}{\Delta},$$

或因 π 微小可写为，

$$\pi \text{ arc } 1'' = \frac{R}{\Delta}.$$

由此得：
$$\pi = \frac{R}{\Delta \text{ arc } 1''},$$

而由太陽至恒星的距离：
$$\Delta = \frac{R}{\pi \text{ arc } 1''}.$$

若至恒星的距离以公里为單位，那末离我們最近的恒星也約有 10^{16} 公里。对于量度这样大的距离就是用上面所說的等于149,500,000公里的天文單位也是不方便的。如果仍然以

$$R = 1\text{ 天文單位和}$$

$$\text{arc } 1'' = \frac{1}{206265}$$

代入上述公式則得
$$\Delta = \frac{206265}{\pi}\text{天文單位},$$

式中 π 以秒为單位。

在現代的恒星天文学中，采用秒差距作为量度恒星距离的單位。秒差距是相应于恒星周年視差为 $1''$ 时的距离。若我們將 $\pi = 1''$ 代入上式，則得：

$$1\text{ 秒差距} = 206265\text{ 天文單位}。$$

所以，以秒差距表示的恒星距离按下式求之：

$$\Delta = \frac{1}{\pi''}\text{秒差距}。$$

一秒差距約等于 30.84×10^{12} 公里。

除秒差距外，还經常采用光年。光年即所謂光在一年內所經过的距离。这一單位約比秒差距減小了十三分之九。它概略地等于 9.46×10^{12} 公里。

在"1953年的苏联天文年历"中为周年視差大于 $0''.10$ 的恒星所列的恒星表內，載有它們的日心坐标。这样的恒星在"年历"中

共有28顆。玆將这些恒星列成一表，并附其視差及其距太陽系的距离。

"苏联天文年历"中具有显著視差的恒星表

"苏联天文年历"的編号	符号	星名及星座		π	距离	
		俄文	中文		以視差秒为單位	以光年为單位
18	η Cass	η Кассиопея	仙后座 王良三	0″.18	5.6	18
41	τ Ceti	τ Кита	鯨魚座 天倉五	0 .32	3.1	10
89	ε Erid	ε Эридана	波江座 天苑五	0 .31	3.2	10
93	δ Erid	δ Эридана	波江座 天苑三	0 .14	7.1	23
126	π^3 Orio	π^3 Ориона	猎户座 参旗六	0 .14	7.1	23
161	γ Leps	γ Зайца	天兎座 厠三	0 .15	6.7	22
190	α C Maj	Сириус, α Б. Пса	大犬座 天狼	0 .38	2.6	8.5
213	α C Min	Процион α М. Пса	小犬座 南河三	0 .31	3.2	10
216	β Gemi	Кастор, β Близнецов	双子座 北河三	0 .10	10.0	33
284	ξ U Maj	ξ Б. Медведицы	大熊座 下台二	0 .15	6.7	22
293	β Leon	Денебола, β Льва	獅子座 五帝座一	0 .10	10.0	33
294	β Virg	β Девы	室女座 右执法	0 .10	10.0	33
309	β C Ven	β Гончих Псов	獵犬座 南河二	0 .11	9.1	30
321	β Coma	β Волос Вероники	后發座 貫索三	0 .13	7.7	25
336	η Boot	η Волопаса	牧夫座 右攝提一	0 .11	9.1	30
356	ε Boot	ε Волопаса	牧夫座 梗河一	0 .11	9.1	30
358	ξ Boot	ξ Волопаса	牧夫座 左攝提增一	0 .17	5.9	19

續上表

"苏联天文年历"的編号	符号	星名及星座 俄文	中文	π	距離 以視差秒为單位	以光年为單位
397	ξ Cor B	ξ Северной Короны	北冕座一 天記	0.16	6.8	22
405	ζ Herc	ζ Геркулеса	武仙座六 鶴	0.11	9.1	30
420	ρ Herc	ρ Геркулеса	武仙座三 女狀	0.13	7.7	25
429	μ Herc	μ Геркулеса	武仙座 九河	0.11	9.1	30
438	70 Ophi	70 Змееносца	蛇夫座四 宗人	0.19	5.3	17
449	χ Drac	χ Дракона	天龙座 少尉	0.12	8.4	27
453	α Lyra	Вега, α Лиры	天琴座一 織女	0.12	8.4	27
482	α Aqil	Альтаир, α Орла	天鷹座二 河鼓	0.20	5.0	16
588	β Hydi	β М. Гидры	水蛇座一 蛇尾	0.14	7.1	23
653	α Cent	α Центавра	半人馬座 比鄰	0.76	1.3	4.3
702	α Psc A	Фомальгаут, α Южной Рыбы	南魚座 北落师門	0.14	7.1	23

由上表看出，距我們最近的并具有最大視差(0″.76)的恒星，是天南的半人馬座比鄰星；它距我們 1.3 視差秒；由它發出的光經四又三分之一年到达地面。在中等緯度地帶所看到的最近的恒星是大犬座天狼星；它的視差为 0″.38，距离我們 2.6 視差秒或 8.5 光年。

第一个进行恒星周年視差測定的是 В. Я. 斯特魯維，他測定了天琴座織女一的視差；观測开始于 1835 年 9 月，結束于 1838 年 8 月，所用的仪器是捷尔普特天文台（捷尔普特城，現在的塔尔圖）的大型折射望远鏡。第二个是白塞尔，他（由 1837 年 8 月至 1838 年

10月)用怯尼格斯别尔格天文台(格斯别尔格城，現在的加里宁格勒)的量日仪測定了天鵝座天津增二十九的視差。約在同一时期，根捷尔松在好望角測定了距我們最近的恒星半人馬座比鄰的視差。

在普尔柯沃天文台的工作中，也極其注重恒星視差的測定。参加这种观測的，有 B.Я.斯特魯維、O.Я.斯特魯維以及 X.A.Ф.彼捷尔斯等人。特别是 C.K.康斯琴斯基自1895年开始，为了这一目的成功地采用了普尔柯沃标准天体攝影仪。

恒星視差的測定使測定到恒星的距离成为可能，这对于恒星天文学具有極大的意义。虽然实际上有可能測量其視差的恒星的数目不是那么多，但对于确定一些規律却仍然是够用了的；根据这些規律，便可以用各种間接的方法測定到恒星和恒星系的距离。这一切都大大地丰富了我們关于宇宙方面的知識，并扩大了我們关于所看到的星体在空間分布的观念。

§50. 蒙气差·蒙气差的近似公式

由天体 σ 發出来的光綫，当它尚未到达位于地面上 M 点(圖64)的观測者的眼內之前，首先要通过地面以上深厚的大气層 A。根据物理学上的定律，当光綫通过大气層时会發生連續的折射，这是因为大气的密度总是由其外界向地面增大的緣故。光的綫路在大气層里是一条向鉛垂綫凸起的曲綫 KM，而观測者是在此曲綫的最后部分的方向上看見天体的，也就是沿着切綫 $M\sigma'$ 这一方向看見天体的。

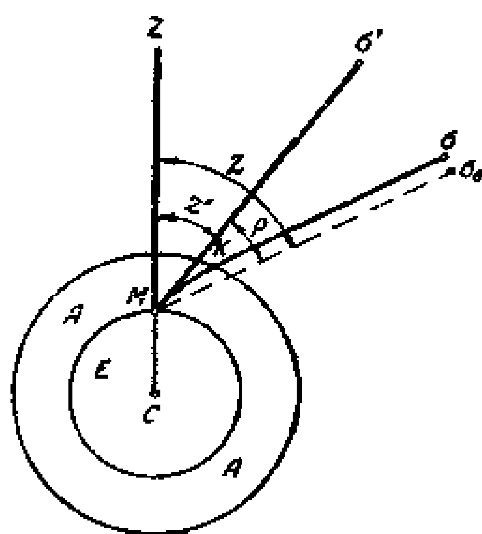


圖 64.

假使沒有大气，則观測者就可以在 $M\sigma_0$ 方向看到天体 σ; 同时，由于地面大气層的厚度与至天体的距离相比較是异常微小的，所以可作 $M\sigma_0$ 平行于光綫方向 $K\sigma$。

这就是天文蒙气差現象。但术語蒙气差通常不仅指的是現象本身，而且还包括由于在大气層中光綫折射而引起的天体方向变化角 $\angle\sigma_0M\sigma'$ 的数値。

現在我們来研究天文蒙气差对天体地平坐标——天頂距和方位角的影响。若 MZ 为天頂方向，則 $\angle\sigma'MZ$ 乃是观測者用仪器所測得的天頂距 z'。我們称它为仪器天頂距或直接观測天頂距。$\angle\sigma_0MZ$ 是經过蒙气差改正后的天頂距 z，此系假定在沒有大气时由观測求得的天頂距。

現在我們詳細地研究一下光綫在大气層中的路徑。在蒙气差理論中，通常視地球为一球体，而大气層系由無穷多个与地球表面同心的無限薄的球層所組成。

在圖 65 中，大气層 A 分为四層。在此光綫在大气層中的路徑为折綫 KM。观測者在此折綫的最后部分的方向上看見天体 σ。層数增多，則愈接近現象的实际情形。当極薄的球層無穷多的情况下取極限，則折綫 KM 就变成了如圖 64 所示的曲綫，而直綫 $M\sigma'$ 就变成了圖 64 上的切綫 $M\sigma'$。

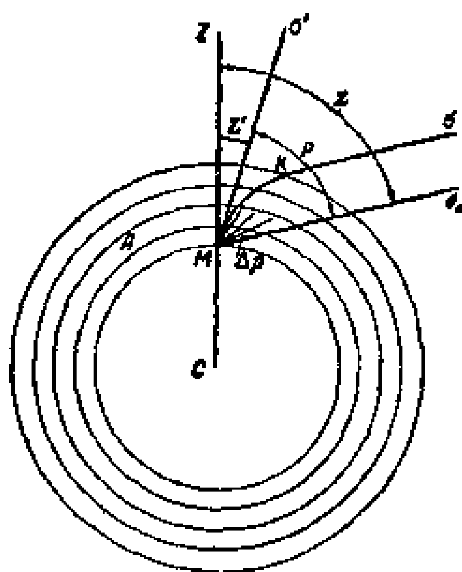


圖 65.

折射定律告訴我們，入射綫和折射綫同处于一平面內，該平面包含由入射点对折射面所引的法綫，因此运用此定律很容易証明，光綫 σK、$\sigma'M$ 和 σ_0M 都同在含鉛垂綫 MZ 的平面内，即所有这些光綫都同在通过观測点和天体的豎

直面內。根据这一論述及圖 64，很明显，

$$z = z' + \rho, \tag{174}$$

式中字母 ρ 表示蒙气差，即 $\angle \sigma_0 M \sigma'$。

此外还可把它表述为：天文蒙气差使天体的天頂距減小，亦即使天体对地平的高度增加。

从上面的这些論述中，可以得出結論：由于全部現象都發生在同一竖直面內，所以天文蒙气差对天体的方位角沒有影响。

若我們由 M 点（参閱圖 65 和圖 66）分別作折綫 MK 各綫段的平行綫，則將 $\angle \sigma_0 M \sigma' = \rho$ 分成几个基本部分 $\Delta\rho_1$、$\Delta\rho_2$ 等等，其中每一部分各等于相应層內的基本折射。由圖 65 和圖 66 可知：

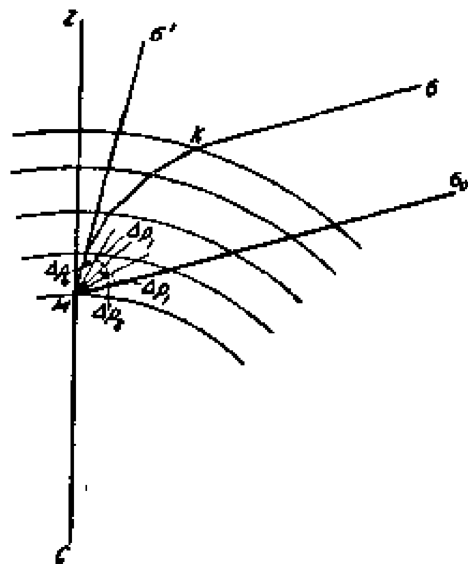


圖 66.

$$\rho = \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3 + \Delta\rho_4,$$

当層数为 n 时：

$$\rho = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta\rho_i.$$

当 $n \to \infty$ 时，象大家所知道的那样，这样的和可以用下面的定积分表示：

$$\rho = \int_K^M d\rho.$$

于是，为了求得 ρ 之数值，必須根据折射定律和地面大气層的特性組成蒙气差的微分方程，借助于它来表示基本球層的折射 $d\rho$。基本球層，如上所述，在蒙气差理論中是由整个地面大气層分成的。然后应將其积分，积分循折綫 KM 由大气層的最外層向地面

推进。其数学式为:

$$\rho = \int_K^M d\rho.$$

由于許多的原因,进行这种积分是非常困难的,首先是因为地面大气層的結構及其依高度而变化的密度变化的規律不能准确地知道,此外大气層又有某些不稳定的特性。

这一与大气的理論研究和实驗相关联的問題，在現代的科学和技术水平上正在被解决。科学家們对此提出了許多理論，这些理論应該認为是使問題解决的逐漸接近。

这里我們特別提出一下俄国和苏联学者們在蒙气差理論方面的研究。普尔柯沃天文学家 Γ.吉利登(1868 年)創造了最完善的蒙气差理論。这一理論直到現在还沒有失掉它的价值。卡贊大学的教授 M.A.科瓦利斯基 (1878 年) 和莫斯科大学教授、苏联科学院通訊院士 C.H.勃拉日哥 (1944 年)，都曾發表过很多有关蒙气差的著作。此外还必須提到的是苏联的青年科学家 H.A.别亞叶夫(1947 年)所發表的論文。

积分后所得的蒙气差方程可写为下列形式:

$$\rho = a\ \mathrm{tg}\ z' + b\ \mathrm{tg}^3 z' + c\ \mathrm{tg}^5 z' + \cdots\cdots, \qquad (175)$$

也就是按 $\mathrm{tg}\,z'$ 的奇次升冪級数表示蒙气差。式中 a、b、c 等等是一些数字系数,其絕对值依次的迅速下降，z' 是天体的观測天頂距。

在推导此方程时，首先只限于第一次近似。我們取地面的一小部分，在这种情况下可視其为平面;这样,大气層的上界也可看作是一个平行于地面的平面。在圖 67 中,此等平面分別以互相平行的直綫 $E'E$ 和 $G'G$ 表示。其次假設: 大气層 A 内的密度相同,都等于地球表面的大气密度，并且具有和整个实际的地面大气層完全相同的折射能方。这样假想的大气層叫做歸化大气層或化算大

气層。由簡單的物理知識很容易算出其高度，它大約等于 8—9 公里。

事实上，若以 h 和 d 表示气压計的水銀柱高及其密度，以 H 和 δ 表示地面归化大气層的高度和地面空气的密度，則由比例式

$$\frac{H}{h}=\frac{d}{\delta}$$

求得：

$$H=\frac{hd}{\delta}.$$

圖 67.

在温度为 0° 而气压为 760 公厘时，则有：

$$d=13.5955,\quad h=0.760\text{ 公尺},\quad \delta=0.001293.$$

因此，

$$H=\frac{0.760\times 13.5955}{0.001293}=7991.2\text{ 公尺}\approx 8\text{ 公里。}$$

在温度为 $+10°C$ 而气压相同时，則有：

$$d=13.5698,\quad h=0.760\text{ 公尺},\quad \delta=0.001149.$$

因此，

$$H=\frac{0.760\times 13.5698}{0.001149}=8973.4\text{ 公尺}\approx 9\text{ 公里。}$$

在这种情况下，由天体 σ 發出的光到达大气層的边界 $G'G$ 上的 K 点产生折射，然后按 KM 方向直綫地射达观测点 M。

物理学中著名的基本折射定律告訴我們：入射角的正弦与折射角的正弦之比，对給定的媒質而言为一常数，此常数称为折射率，即：

$$\frac{\sin i}{\sin f}=\mu,$$

式中字母 i、f 和 μ，分别表示入射角、折射角及当光綫由眞空通过这一媒質时的折射率。象大家所知道的那样，入射角和折射角所指的是入射綫和折射綫分别与通过入射点的折射面法綫所構成的角度。

过 K 点作直綫 NN' 垂直于 GG'。則 NN' 就是 GG' 面的法綫，而 $\angle \sigma KN$ 和 $\angle N'KM$ 分别为入射角和折射角。

因此可以写成：

$$\frac{\sin \sigma KN}{\sin N'KM} = \mu_0, \tag{176}$$

式中 μ_0 为地面空气的折射率。

观測者在 M 点，沿 MK 的延長綫見到天体在 $M\sigma'$ 方向上。如在圖 64 中一样，$M\sigma_0$ 是我們假想在沒有大气的情况下天体的方向，且平行于 $K\sigma$ 方向；直綫 MZ 是天頂方向，所以：

$$MZ \perp E'E, \quad MZ \parallel N'N,$$

这是因为这兩条直綫都垂直于兩平行平面 $E'E$ 及 $G'G$ 之故。

由圖 67 可以看出：

$\angle \sigma_0 MZ = z$——天体的改正天頂距；

$\angle \sigma' MZ = z'$——对仪器的視天頂距；

由于边互相平行，故

$$\angle \sigma KN = \angle \sigma_0 MZ = z;$$

而 $\angle N'KM = \angle \sigma' MZ = z'$，因为它們是平行綫 MZ 及 $N'N$ 間的內錯角。

于是，(176)式可改写为：

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = \mu_0.$$

利用关系式(174)（此式可直接由圖 67 中明白看出），我們又可將上式改写为：

$$\frac{\sin(z'+\rho)}{\sin z'} = \mu_0.$$

展开分子去分母得:

$$\sin z' \cos\rho + \cos z' \sin\rho = \mu_0 \sin z'. \tag{177}$$

蒙气差 ρ 是一微小量;当天体位于观測者的地平綫时,其值为最大;此时,它的理論值約为 $35'$。注意到这一点,可假設:

$$\cos\rho = 1, \quad \sin\rho = \rho'' \operatorname{arc} 1''.$$

此时,(177)式可采用下列形式:

$$\sin z' + \rho'' \operatorname{arc} 1'' \cos z' = \mu_0 \sin z'.$$

就 ρ 解此方程式得:

$$\rho'' = \frac{\mu_0 - 1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg} z', \tag{178}$$

或

$$\rho'' = a \operatorname{tg} z'. \tag{178'}$$

假定地面空气的平均折射率(空气溫度 $t° = 0°$, 气压 $b = 760$ 公厘水銀柱,)$\mu_0 = 1.000292$, 进行計算得:

$$\rho'' = 60''.2 \operatorname{tg} z'. \tag{179}$$

于是,我們在第一次近似中,求得了(175)式的第一項。(179)式是一个蒙气差的近似公式;在近似計算时,对于天頂距为 $45°$ 或稍大一些时,可采用此式。当 $z' = 90°$ 时,再应用这个公式那就荒謬絕倫了。

大于 $80°$ 的天頂距之精密而复杂的公式,是借助于極其严密和复杂的理論推算所得的;然而,就是按这些公式所求得的蒙气差的理論值和蒙气差的观測值之差也很大,在某些情况下竟达到 $3'$。当天頂距很大时,多少精确点的蒙气差的理論計算一般也是有很多困难的,这种困难通常几乎是不可克服的。

因此,大于 $70°$—$80°$ 的天頂距观測最好是不进行。

§51. 蒙气差的微分方程式及其积分

为了推导蒙气差的微分方程,我們較詳細地来研究一下光綫

由一个基本球層到另一个基本球層的路徑。設圓弧 GBG'（圖 68）表示这兩層的球形边界。光綫 AB 在此边界的 B 点發生折射，然后不按 BD 方向而按 BE 方向前进。直綫 NN' 是折射面的法綫。分別以字母 i 和 f 表示入射角 ABN 和折射角 $N'BE$。$\angle DBE$ 是基本蒙气差或微分蒙气差 $d\rho$。显然：

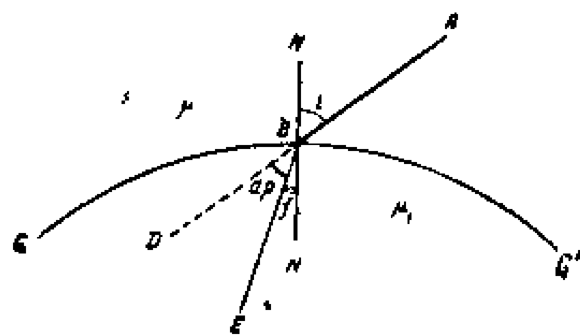


圖 68.

$$f=i-d\rho.$$

設这兩層的絕对折射率分別为 μ 和 μ_1，并假定：

$$\mu_1>\mu.$$

因而可写为：
$$\mu_1=\mu+d\mu,$$
式中 $d\mu$ 是折射率 μ 的無穷小增量。

上面我們所述的光折射定律公式，乃是就光綫由真空經过的情况而言的。若光由一透明的媒質进入另一具有不同的絕对折射率的媒質，則相应的公式应写为：

$$\frac{\sin i}{\sin f}=\frac{\mu_1}{\mu},$$

式中 μ 是光綫出来的那層媒質体的折射率，而 μ_1 是光綫进入另一層媒質的折射率。

对于这种情况来說，根据上述兩个等式，此式显然可改写为下列形式：

$$\frac{\sin i}{\sin(i-d\rho)}=\frac{\mu+d\mu}{\mu}.$$

我們將此比例式作若干的換算。首先將左边分母中差数的正弦展开，將右边的分子分別以分母除之，則得：

$$\frac{\sin i}{\sin i\cos d\rho-\cos i\sin d\rho}=1+\frac{d\mu}{\mu}.$$

因为 $d\rho$ 是一微小量，所以我們可以將此量的正弦及余弦代以展为級数后的第一項，卽假設：

$$\sin d\rho = d\rho, \quad \cos d\rho = 1.$$

那么上面的比例式可写为：

$$\frac{\sin i}{\sin i - d\rho \cos i} = 1 + \frac{d\mu}{\mu},$$

或將上式左边的分子、分母同除以 $\sin i$ 得：

$$\frac{1}{1 - d\rho \operatorname{ctg} i} = 1 + \frac{d\mu}{\mu}.$$

由此消去分母得：

$$\left(1 + \frac{d\mu}{\mu}\right)(1 - d\rho \operatorname{Ctg} i) = 1$$

或脫括号得：

$$1 + \frac{d\mu}{\mu} - d\rho \operatorname{ctg} i - \frac{d\mu \times d\rho}{\mu} \operatorname{ctg} i = 1.$$

合幷同类項，舍去二級小之項，最后再除以 $\operatorname{ctg} i$，則得：

$$d\rho = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i. \tag{180}$$

这就是我們所需要的蒙气差微分方程。然后直接可得：

$$\rho = \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i. \tag{181}$$

此式的积分限由下列假設确定：在大气層外界的 K 点上，$\mu = 1$；而在 M 点上，折射率等于 μ_0——地面空气的折射率。

以后我們需要利用所謂折射理論上的不变关系式，茲进行不变关系式的推导。为此，察看圖 69，在此圖上表示出三个相鄰的球層，每層的編号为 n、$n-1$ 及 $n-2$，它們

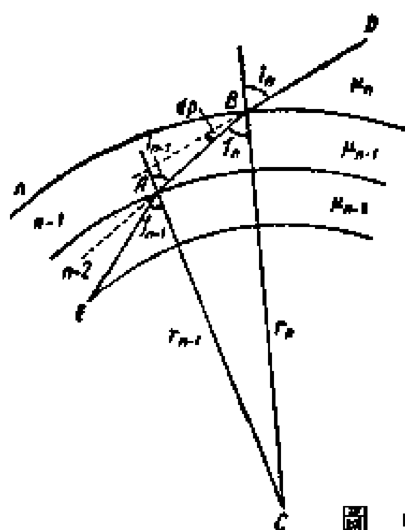


圖 69.

的絕对折射率分别为μ_n、μ_{n-1}和μ_{n-2}。

折綫$DBAE$是光的路徑，B和A是折射点。設n和$n-1$兩層間球形边界的半徑为r_n，而$n-1$和$n-2$兩層間球形边界的半徑为r_{n-1}；C为地心，也为所有球形界面的共同球心。

于是，按折射定律有：

$$\frac{\sin i_n}{\sin f_n}=\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n},$$

式中i_n和f_n为相应的入射角和折射角。

由此得
$$\mu_n \sin i_n=\mu_{n-1}\sin f_n. \tag{a}$$

其次，由三角形ABC(圖69)中按正弦定理求得：

$$\frac{\sin f_n}{\sin i_{n-1}}=\frac{r_{n-1}}{r_n},$$

或
$$r_n \sin f_n=r_{n-1}\sin i_{n-1}. \tag{б}$$

將(a)式和(б)式逐項相乘：

$$\mu_n \sin i_n r_n \sin f_n=\mu_{n-1}\sin f_n r_{n-1}\sin i_{n-1},$$

化簡后得：
$$\mu_n r_n \sin i_n=\mu_{n-1}r_{n-1}\sin i_{n-1}. \tag{182}$$

这就是我們所关心的不变关系式，此一关系式可簡述为：在同心球層結構的大气層中，折射率、球層界面的半徑及入射角的正弦之积为一常数。

若逐漸地由一層轉到另一層，則可求得此常数之値。我們拿与地面最接近的几層来作例吧。此时：

$$\mu_1 r_1 \sin i_1=\mu_0 r_0 \sin i_0.$$

但μ_0是地面空气的折射率，r_0是地球半徑，而i_0正是光綫与观測点鉛垂綫的夾角z'。因此对于任何一層都可写为：

$$\mu r \sin i=\mu_0 r_0 \sin z'=\text{常数}。 \tag{183}$$

于是，我們利用（183）式，来进一步換算蒙气差的积分式(181)。由(183)式决定$\sin i$：

$$\sin i=\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\sin z'. \tag{184}$$

由此得:　　$\cos i=\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\sin z'\right)^2}$.

用余弦除正弦得:

$$\operatorname{tg} i=\frac{\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\sin z'}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\sin z'\right)^2}}. \tag{185}$$

根据(185)式,可將蒙气差的积分式(181)写为:

$$\rho=\int_1^{\mu_0}\frac{\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\sin z'\frac{d\mu}{\mu}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\right)^2\sin z'}}. \tag{186}$$

积分时,z' 和 $\sin z'$ 乃为常数。因而积分式只包含有兩个变数 μ 和 r。它們的变化是彼此关联的，但是一般說来，我們知道的，仅仅是空气的折射率 μ 隨球層的高度的增加而減少，或謂其隨球層的半徑的增加而減少，兩者都一样。这种关系的精密数学式是不知道的；尤其是在創立蒙气差最初的經典理論的十七世紀和十八世紀中,关于这种关系知道的更少。因此,当創造用求积法取积分式(186)的理論时,不得不采用假說，作出有关这种关系的数学式的較为可能的假定。

于此，我們研究这种最初的假設之一(布格,1729年)作为例子,并取用(181)式的蒙气差积分式:

$$\rho=\int_1^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu}\operatorname{tg} i$$

完成其最后的积分。

根据(184)式,

$$\sin i=\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\sin z'.$$

假設，μ 和 r 間的关系以下式表示:

$$\frac{r_0}{r}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{m+1}. \tag{187}$$

这就是布格的假設。关于幂指数 m 的数値不作任何假定；这一数値应該在以后根据直接的天文观测資料来决定，这一点將在后面作較詳細的叙述。

將(187)式代入 $\sin i$ 的(184)式:

$$\sin i=\frac{\mu_0}{\mu}\times\frac{r_0}{r}\sin z'=\frac{\mu_0}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{m+1}\sin z',$$

即

$$\sin i=\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{m}\sin z'. \tag{188}$$

將此式取对数:

$$\ln\sin i=m\ln\mu-m\ln\mu_0+\ln\sin z'.$$

现在以 m, μ_0 和 z' 为常数，微分上式:

$$\frac{di}{\operatorname{tg} i}=m\frac{d\mu}{\mu}.$$

由此得:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\operatorname{ctg} i\frac{di}{m}.$$

根据这一关系式，在(181)积分式中更换变数，即用新的变数 i 代替旧的积分变数 μ。更换后得:

$$\rho=\int_{i_1}^{i_0}\operatorname{ctg} i\frac{di}{m}\operatorname{tg} i,$$

或

$$\rho=\int_{i_1}^{i_0}\frac{di}{m},$$

或將常数 $\frac{1}{m}$ 放至积分符号之前，即

$$\rho=\frac{1}{m}\int_{i_1}^{i_0}di.$$

新变数 i 的积分限，根据(188)式决定；(188)式可写为下列形式：

$$i=\arcsin\left[\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^m\sin z'\right].$$

在上式中，以 μ_0 代替 μ，也就是假設 $\mu=\mu_0$，则得：

$$i_0=z',$$

若代入 $\mu=1$，则得：

$$i_1=\arcsin\left(\frac{1}{\mu_0^m}\sin z'\right).$$

于是，我們的蒙气差积分式最后可写为：

$$\rho=\frac{1}{m}\int\limits_{\arcsin\frac{\sin z'}{\mu_0^m}}^{z'} di.$$

因此积分后得：

$$\rho=\frac{1}{m}\Big|_{\arcsin\frac{\sin z'}{\mu_0^m}}^{z'} i,$$

二次代入后得：

$$\rho=\frac{1}{m}\left(z'-\arcsin\frac{\sin z'}{\mu_0^m}\right). \tag{189}$$

我們將以此例来証明：怎样求得蒙气差的展开式，而其形式为 $\operatorname{tg} z'$ 奇次幂的級数。为此，將(189)式作下列的换算。

这样，乘上 m 得：

$$m\rho=z'-\arcsin\frac{\sin z'}{\mu_0^m},$$

由此

$$z'-m\rho=\arcsin\frac{\sin z'}{\mu_0^m},$$

或

$$\sin(z'-m\rho)=\frac{\sin z'}{\mu_0^m},$$

或

$$\mu_0^m\sin(z'-m\rho)=\sin z'.$$

將差的正弦展开:

$$\mu_0^m(\sin z'\cos m\rho-\cos z'\sin m\rho)=\sin z'.$$

脫去括弧，因乘积 $m\rho$ 微小以展为級数后之第一項代替 $\sin m\rho$，即假設:

$$\sin m\rho=m\rho\ \mathrm{arc}\,1''.$$

因而，

$$\mu_0^m\sin z'\cos m\rho-\mu_0^m\cos z'\ \mathrm{arc}\ 1''m\rho=\sin z',$$

或 $$\mu_0^m\cos z'\ \mathrm{arc}\ 1''m\rho=\mu_0^m\sin z'\cos m\rho-\sin z',$$

或 $$\mu_0^m\cos z'\mathrm{arc}\ 1''m\rho=\sin z'(\mu_0^m\cos m\rho-1).$$

由此可决定 ρ:

$$\rho=\frac{1}{\mu_0^m m\ \mathrm{arc}\ 1''}\mathrm{tg}\ z'(\mu_0^m\cos m\rho-1),$$

或將 $\cos m\rho$ 展为級数，則:

$$\rho=\frac{1}{\mu_0^m m\mathrm{arc}1''}\mathrm{tg}\ z'\left[\mu_0^m\left(1-\frac{m^2\rho^2}{2}+\frac{m^4\rho^4}{24}-\frac{m^6\rho^6}{720}+\cdots\right)-1\right],$$

或在方括弧內略加換算后得:

$$\rho=\frac{1}{\mu_0^m m\ \mathrm{arc}\ 1''}\mathrm{tg}\ z'\left[(\mu_0^m-1)-\frac{\mu_0^m m^2\rho^2}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_0^m m^4\rho^4}{24}-\frac{\mu_0^m m^6\rho^6}{720}+\cdots\right],$$

或將 $\mathrm{tg}\ z'$ 置于方括弧內，則:

$$\rho=\frac{1}{\mu_0^m m\ \mathrm{arc}\ 1''}\left[\mathrm{tg}\ z'(\mu_0^m-1)-\mathrm{tg}\ z'\left(\frac{\mu_0^m m^2\rho^2}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\mu_0^m m^4\rho^4}{24}+\frac{\mu_0^m m^6\rho^6}{720}-\cdots\right)\right].$$

脫去方括弧，我們得这样的 ρ 表达式:

$$\rho=\frac{\mu_0^m-1}{\mu_0^m m\ \mathrm{arc}\ 1''}\mathrm{tg}\ z'-\frac{\mathrm{tg}\ z'}{\mu_0^m m\ \mathrm{arc}\ 1''}\left(\frac{\mu_0^m m^2\rho^2}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu_0^m m^4\rho^4}{24}+\frac{\mu_0^m m^6\rho^6}{720}-\cdots\right). \tag{B}$$

用字母 a 表示上式右边第一项 $\operatorname{tg} z'$ 的系数，即設：

$$a=\frac{\mu_0^m-1}{\mu_0^m m \operatorname{arc} 1''}.$$

若蒙气差的第一近似式只局限于(в)中的第一項，那末可近似地写为：

$$\rho=a \operatorname{tg} z'. \tag{г}$$

为了求第二近似式，在(в)式的右边括弧中以(г)式代 ρ 則得：

$$\rho=a \operatorname{tg} z'-\frac{\operatorname{tg} z'}{\mu_0^m m \operatorname{arc} 1''}\left(\frac{\mu_0^m m^2}{2} a^2 \operatorname{tg}^2 z'-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_0^m m^4}{24} a^4 \operatorname{tg}^4 z'+\frac{\mu_0^m m^6}{720} a^6 \operatorname{tg} z^{6\prime}-\cdots\right),$$

或最后得：　$\rho=a \operatorname{tg} z'+b \operatorname{tg}^3 z'+c \operatorname{tg}^5 z'+d \operatorname{tg}^7 z'+\cdots,$

式中

$$a=\frac{\mu_0^m-1}{\mu_0^m m \operatorname{arc} 1''},$$

$$b=-\frac{\mu_0^m m^2\left(\mu_0^m-1\right)^2}{2 \mu_0^m m \operatorname{arc} 1'' \mu_0^{2m} m^2 \operatorname{arc}^2 1''}=-\frac{\left(\mu_0^m-1\right)^2}{2 \mu_0^{2m} m \operatorname{arc}^3 1''}, \tag{190}$$

$$c=\frac{\mu_0^m m^4\left(\mu_0^m-1\right)^4}{24 \mu_0^m m \operatorname{arc} 1'' \mu_0^{4m} m^4 \operatorname{arc}^4 1''}=\frac{\left(\mu_0^m-1\right)^4}{24 \mu_0^{4m} m \operatorname{arc}^5 1''},$$

$$d=-\frac{\mu_0^m m^6\left(\mu_0^m-1\right)^6}{720 \mu_0^m m \operatorname{arc} 1'' \mu_0^{6m} m^6 \operatorname{arc}^6 1''}=-\frac{\left(\mu_0^m-1\right)^6}{720 \mu_0^{6m} m \operatorname{arc}^7 1''}$$

等等。

于是，我們求得了上面所引用的級数(175)。我們之所以选擇上述的理論：一方面是因为它对所有一切所謂的經典理論来說都是最典型的；另一方面是因为从数学观点来看它較之許多其他的理論簡單得多，这使我們有可能比較容易地把一切計算进行到最后。这一理論只有当天頂距在 50°—60° 以下时才能得出令人滿意的結果；从 $z=80°$ 起，理論値和观測値之差將是很大的。

当然，在其他理論中，采用的是另一些大气層構造的假設，另一些积分法以及另一些蒙气差展开式，因此产生出(175)式的系数

的另外一些的表达式。

一切所謂的蒙气差典型理論的共同特征，就是在其所求得的公式中都含有一些常数。这些常数中，一部分是任意假設的，而另一部分是取决于地面空气的折射率的。但这种折射率的数值，不是根据物理实驗測定的，而是和其他的常数值一样，由專門的天文观測确定的。为了这一目的，特别需要利用在不同天頂距的上中天和下中天的尽量多的拱極星的观測天頂距。

为了对这种測定原理有某种概念，我們假定：已知的仅仅是在前节中所推出的蒙气差公式(178′)，即

$$\rho = a \operatorname{tg} z',$$

并知道系数 a_0 的近似值，而想根据观測求得此量 a 的更精确的数值。設：

$$a = a_0 + \Delta a, \qquad (A)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi,$$

式中 φ_0 是已知的观測地点的緯度 φ 的近似值。若恒星在天頂南上中天，以及該恒星在下中天时則按 § 19 的公式对每一顆星都可写出：

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \Delta\varphi - \delta &= z_B + \Delta a \operatorname{tg} z'_B, \\ 180^\circ - \varphi_0 - \Delta\varphi - \delta &= z_H + \Delta a \operatorname{tg} z'_H, \end{aligned} \qquad (\mathrm{I})$$

若兩次中天都發生在天頂北，則：

$$\begin{aligned} \delta - \varphi_0 - \Delta\varphi &= z_B + \Delta a \operatorname{tg} z'_B, \\ 180^\circ - \varphi_0 - \Delta\varphi - \delta &= z_H + \Delta a \operatorname{tg} z'_H. \end{aligned} \qquad (\mathrm{II})$$

式中 z_B 和 z_H，分别为已按(178′)式加了蒙气差改正的恒星在上中天和下中天时的天頂距，即：

$$z_B = z'_B + a_0 \operatorname{tg} z'_B,$$

$$z_H = z'_H + a_0 \operatorname{tg} z'_H.$$

此外，赤緯 δ 应加上一切变化的改正，关于这些变化在以后說

明(光行差、岁差、章动和自行)。

在第一种情况下，由(I)組公式中的第二式减其第一式得：

$$180^\circ-2\varphi_0-2\Delta\varphi=(z_H-z_B)+\Delta a(\operatorname{tg} z'_H-\operatorname{tg} z'_B). \qquad (I')$$

在第二种情况下，(II)組公式內的兩式相加得：

$$180^\circ-2\varphi_0-2\Delta\varphi=(z_H+z_B)+\Delta a(\operatorname{tg} z'_H+\operatorname{tg} z'_B). \qquad (II')$$

因而，对每一顆星都可作出起始誤差方程式：

$$ax+by+l=v,$$

式中
$$x=\Delta\varphi,\quad y=\Delta a,\quad a=2,$$
$$b=\operatorname{tg} z'_H\mp\operatorname{tg} z'_B,\quad l=(z_H\mp z_B)+2\varphi_0-180^\circ.$$

依最小二乘法解算这一些方程組，求得未知数 $\Delta\varphi$ 和 Δa，然后按(I)式求得較精确的緯度 φ 和蒙气差常数 a 之值。

在此所叙述的只是这种研究的簡化方式；实际上要求得蒙气差常数值是非常复杂的，但其基本概念則是相同的。

經典蒙气差理論中最完善的是上面所說的Г.吉利登的理論。在普尔柯沃天文台，已完成了蒙气差系数或常数的最精密的測定。

在蒙气差理論中，新的学派是从另一些观点出發的。这一学派的創始者，是俄罗斯科学家M.A.科瓦利斯基(1878)。他首先利用了气球在飞行时所测得的关于不同高度的空气的溫度的資料，并証明了可以根据大气学的資料来研究蒙气差。大气学是一門关于大气構造及其变动的科学。使这一学派更进了一步的是П.加尔采尔(1924)的著作。加氏曾在普尔柯沃天文台实習过，并在此工作了多年。苏联科学院通訊院士C.H.勃拉日哥的一些著作，使这一理論得到进一步的發展和完善。

新学派，正确地說俄罗斯和苏联学派研究蒙气差的基本特点如下：

(1)抛弃了关于空气折射率 μ 取决于球層高度 r 的任意的数学假定；

(2)展为級数的不是蒙气差积分，而是积分函数，因而，这一积分表达为最簡單的积分級数和；

(3)根据在不同高度的有关空气的成分、溫度及压力的大气資料，求得相应的μ及r数値的級数，这些資料是根据对游离大气的直接探察和借各种間接的方法而获得的。

(4)級数的各个系数値的求得，即各个积分値的求得，不是用求积法，而是用数値相加法(如梯形法)，为此將大气分成几个有限数的球層。

(5)最精密地分析和計算引起蒙气差的实际数値和計算値的差异的一切可能原因。

§52. 真蒙气差和平蒙气差·蒙气差表

为了实际計算蒙气差，应用(175)型的公式是不方便的。此外，由(178)式和(190)式可以看出，(175)式級数的系数中包含有随地面空气的折射率μ_0为轉移的因子。空气的折射率，一般說来，是随空气密度而变的变数，而空气密度則随空气的压力和溫度而变。事实上，当压力增大时，空气密度便增大，折射率也同样增大；当压力减小时，則發生相反的現象。当溫度增高时，恰好相反，空气密度减小，而折射率也随之减小；当溫度降低时，密度和折射率則增大。

空气折射率μ以下式表示：

$$\mu=1+k\delta, \tag{191}$$

式中δ是空气密度，k是常系数。

物理学告訴我們，空气和一般气体的密度可以用下列方程表示：

$$\delta=\delta_0\frac{b}{b_0}\,\frac{273}{273+t^\circ}, \tag{192}$$

式中 b 是压力，$t°$ 是攝氏溫度，δ_0 是相应于溫度 $t°$ 为 0°C和压力为 b_0 时的空气密

因此，蒙气差的大小还取决于大气压力和空气溫度。

所以，为了簡化在观測时的蒙气差計算，就应这样来做：以某定压力和定溫度为标准，并在这种压力和溫度下計算若干蒙气差値，并將这些数値載于以逐漸增大的天頂距为引数的表中。在标准溫度和标准压力下所計算出来的蒙气差叫做平蒙气差 ρ_0。在任何观測时間內的实际压力和溫度下所求得的蒙气差，条件地称之为"眞"蒙气差 ρ。

現时在苏联天文大地測量工作中所使用的蒙气差表（参閱二版"天文計算用表"中第 26 表，和"中央測繪科学研究所論文集"第 30 期，莫斯科，1939 年）是根据 1889 年發表的拉多蒙气差理論編制的。这些表是將自 1915 年起載于"天文年历"的蒙气差表稍加改变重印的。在这些表中，平蒙气差 ρ_0 是按 $b_0=760$ 公厘和 $t_0=$ $=0°C$ 計算的。在其他的理論中，有时以另一溫度如 $+10°C$ 作为标准。

取(175)式：

$$\rho=a\,\mathrm{tg}z'+b\,\mathrm{tg}^3z'+c\,\mathrm{tg}^5z'+\cdots$$

設：

$$a=a_1g,$$

$$b=b_1g,$$

$$c=c_1g,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

式中 g 是載数中一切系数的公因子，它随空气折射率 μ_0 而变。例如，对于(190)式的系数，这种公因子为：

$$\frac{\mu_0{}^m-1}{\mu_0{}^m}.$$

將此随折射率而变的公因子提到括号外，則得

$$\rho=g(a_1\operatorname{tg} z'+b_1\operatorname{tg}^3 z'+c_1\operatorname{tg}^5 z'+\cdots, \tag{193}$$

式中 $a_1, b_1, c_1, \cdots$是新的系数，实际上它們显然不因或者很少因折射率而变，或者至少不受折射率因溫度和气压波动而变的影响。这兒，系数a_1与折射率是完全無关的，而其余的系数也只有部分的关系。然而，(175)級数的系数下降异常迅速；例如，$a=60''$, $b=0''.06$ 等等。因为系数 b、c 等之值很小，又因为由于气压和溫度的变动而产生折射率 μ_0 的变化也很小，故可認为这些系数之値实际上是不隨溫度和气压的变动而变化的。为了書写簡便起見，用任一字母例如N来表示括弧中的式子，卽假設：

$$a_1\operatorname{tg}z'+b_1\operatorname{tg}^3 z'+c_1\operatorname{tg}^5 z'+\cdots=N.$$

于是(193)式可改写成：

$$\rho=gN, \tag{194}$$

在此，如上所述，由于(191)式和(192)式中的 g 是折射率 μ_0 的某种函数，因而也是气压 b 和溫度 t 的函数，卽

$$g=f(b,t). \tag{195}$$

对于准标气压値和标准溫度値 b_0 和 t_0 来說，按(195)式得：

$$g_0=f(b_0,t_0), \tag{196}$$

因此，按(194)式可以求得平蒙气差 ρ_0, 卽：

$$\rho_0=g_0N. \tag{197}$$

反之，知道了平蒙气差，例如由表查得，則可求得在已知气压 b 和溫度 t 时的眞蒙气差。

为此，用(197)式除(194)式消去N，得：

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{g}{g_0},$$

由此得：

$$\rho=\frac{g}{g_0}\rho_0. \tag{198}$$

于是，欲根据平蒙气差求眞蒙气差，就必須求出 $\frac{g}{g_0}$ 之比値。为了确定此値，將(195)式展为台劳級数，并顧及到(190)式。

若限取一級小，则得：

$$g=g_0+\frac{b-b_0}{1}\frac{\partial f(b,t)}{\partial b}+\frac{t-t_0}{1}\cdot\frac{\partial f(b,t)}{\partial t}. \tag{199}$$

用 g_0 逐項除上式兩边得：

$$\frac{g}{g_0}=1+\frac{b-b_0}{g_0}\frac{\partial t}{\partial b}+\frac{t-t_0}{g_0}\frac{\partial f}{\partial t},$$

或引入符号

$$B=\frac{b-b_0}{g_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial b};\quad A=\frac{t-t_0}{g_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{200}$$

则得：

$$\frac{g}{g_0}=1+A+B. \tag{201}$$

將(201)式代入(198)式得：

$$\rho=\rho_0(1+A+B),$$

或最后为

$$\rho=\rho_0+\rho_0(A+B). \tag{202}$$

(202)式是根据平蒙气差計算眞蒙差的实用公式；平蒙差可按引数 z' 由表中查取。系数 A 和 B 亦可在蒙气差表中查得，它們分別以"温度"和"气压"为引数刊載于表內(参閱前已說及的"天文計算用表"中第 99—102 頁的"蒙气差表")。

若要依次的單独計算溫度和气压的影响，則用类似的推証导出下式：

$$\rho=\rho_0(1+A)(1+B),$$

式中 A 和 B 之値与(200)式中的 A、B 値一样。

引入符号：

$$\rho_0'=\rho_0(1+A),$$

則可写成：

$$\rho_0'=\rho_0+\rho_0A,\quad \rho=\rho_0'+\rho_0'B. \tag{203}$$

当根据上述蒙气差表中的平蒙气差計算眞蒙气差时，(203)式也可作为实用公式。

当天頂距大于 60°时，应加附加改正系数 α 和 β，因此当

$$60°<z'<80°,$$

(203)式应采用如下的形式:

$$\rho_0'=\rho_0+\alpha A\rho_0,\quad \rho=\rho_0'+\beta B\rho_0';\tag{204}$$

而系数 α 和 β 也載于"蒙气差表"內(10頁,表 IV 和表 V),α 按引数 z' 載出,β 按引数 ρ_0' 載出。

对于野外天文观測計算而論,这些表的精度是足够的。

在苏联以及其他国家天文台的实际工作中,广泛地采用"普尔柯沃蒙气差表",此表系由普尔柯沃天文学家格罗馬德斯基編制的,他所依据的是吉利登的蒙气差原理及彼捷尔斯和其他普尔柯沃天文学家們用普尔柯沃垂直大圈仪观測所完成的在蒙气差方面的卓越研究。此"表"于 1870 年問世,于 1905 年出第二版,在該版中未作任何修改和补充,在 1930 年再版,其中主要部分保持未动,但增添了一些計算風力、恒星色彩、日期及时刻对蒙气差的影响的表。在旧版中已有計算空气溫度(在观測时的室內及室外溫度)、气压、湿度、重力变化等等对蒙气差的影响的表。这些表是为用对数計算蒙气差而編制的,这样,实用公式有下列形式:

$$\lg\rho=(\mu+\lg\operatorname{tg}z')+\lambda\gamma+A(B+T)+$$
$$+\text{其他的次要改正項。}\tag{205}$$

括弧內的式子　　$(\mu+\lg\operatorname{tg}z')$

是平蒙气差的对数;它在表 II 內按引数 z' 立刻可以查得;第二項 $\lambda\gamma$ 是蒙气差对室外空气溫度的对数改正,而 λ 按引数 z' 由表中查取,γ 按引数 t° 查取,t° 是"外面"溫度計的攝氏度数。$A(B+T)$ 一項給出空气压力改正数。A 按引数 z' 查取;它在大天頂距附近时才与 1 單位有显著的差异。B 的表是按以公厘为單位的"气压計高度"为引数編制的,幷假定使用的是水銀气压計。T 是計算水銀柱高度因水銀本身溫度变化而起的变化的。因此 T 的表以 τ 为引数編制,τ 是所謂的"里面"溫度計的度数,此溫度計就是挂在观測室里的气压計內的溫度計。为了要詳細地了解"普尔柯沃蒙

气差表”，当然就必須直接应用这些表。

在“1953年的苏联天文年历”中的435頁（表XII）載有蒙气差表，蒙气差計算的精度达0″.1。这是一个簡化了的“普尔柯沃蒙气差表”。按这个表計算蒙气差对数的公式为：

$$\lg \rho = \mu + \lg \operatorname{tg} z' + \lambda\gamma + B + T. \qquad (206)$$

式中μ、λ、γ、B及T的値与上述同；系数A取其等于1；当用無液气压計測定大气压力时，取T等于零。在此表中，首先按引数z'給出平蒙气差ρ_0及系数μ和α；然后，依据用攝氏溫度来表示的“外面溫度計讀数”为引数給出値γ（及其表差），按“以公厘为單位的气压計讀数”給出系数B（及其表差）；最后，按照用攝氏溫度表示的“里面溫度計讀数”τ为引数給出系数T。系数γ、B和T都以第四位对数为單位。

例

1. 仪器天頂距 $z'=47°24'37''.2$；气压計讀数 $b=766.6$ 公厘；溫度計讀数 $t°=17°.7C$。应用(202)式，按“天文計算用表”中的蒙气差表求改正天頂距 z。

按表I（第100頁）求得：

$$\begin{array}{lr} 47°20' \cdots\cdots & 1'5''.13 \\ 4\ 37''.2 \cdots\cdots & 0\ .18 \\ \hline & \rho_0 = 1'5''.31 \end{array}$$

按表II和表III（第102頁）查取：

$$\begin{array}{c|l} A & -0.0610 \\ B & +0.0087 \\ \hline A+B & -0.0523 \end{array}$$

按(202)式計算ρ：

$$\begin{array}{c|r} \rho_0 & 1'5''.31 \\ \rho_0(A+B) & -\ 3\ .42 \\ \hline & 1'1''.89 \end{array}$$

$\rho_0(A+B)$ 的乘积可用对数尺計算，也可用計算机計算。將ρ湊整至0″.1，按(174)式計算z：

z'	$47°24'37''.2$
ρ	$+\quad 1\quad 1\ .9$
z	$47°25'39''.1$

2．当 $z'=47°24'37''.2$、$b=766.6$ 公厘、$t°=+17°.70$ 时，按(203)式和"天文計算用表"中所載的蒙气差表求眞蒙气差。

按表 I(第 100 頁)求得：

$47°20'$ ························ $1'5''.13$

$4'37''.2$ ····················· $0\ .18$

$\rho_0=1'5''.31$

按表 II 和表 III(第 102 頁)求得：

$$A=-0.0610,$$

$$B=+0.0087.$$

按(203)式計算 ρ：

ρ_0	$1'5''.31$
$\rho_0 A$	$-\quad 3\ .98$
ρ'_0	$1\ 1\ .33$
$\rho'_0 B$	$+\quad 0\ .53$
ρ	$1'1''.86$
ρ	$1'1''.9$

3．根据下列数据：

$$z'=47°24'37''.2,\ b=766.6\ 公厘,$$

$$t°=+17°.70,$$

按"1953 年的苏联天文年历"中的表 XII(第 435 頁)求其眞蒙气差，应精确到 $0''.1$。

根据(206)式，按下列格式进行計算：

μ	1.7636
lg tg z	0.0366
$\mu+$lg tg z	1.8002
改正項的总和	$-\quad 80$
lg ρ	1.7922
ρ	$61''.97=1'2''.0$
γ	$-\ 118$
$(\lambda-1)\gamma$	$-\quad 0.2$
B	$+\quad 38$
总　　和	$-\quad 80$
λ	1.002

假設气压用無液气压計測定，取 $T=0$。在例1及例2中，当凑整到0″.1时，一致得：$\rho_0=1'1''.9$。在例3中，同量的值为 $1'2''.0$。这一差异，乃是由于制表时所采用的理論不同及常数数值的不同所致。

§53. 光行差的簡明理論

若观測者在空間运动的速度与光速相等，則由某一天体發射出来的光綫是偏向观測者的运动方向的。为了对这一现象的实質有一个明确的概念，我們来研究一个在日常生活中所常見的类似現象。

假設在下雨的时候沒有風，那么雨絲是垂直下落的。若观測者靜止不动，那么他为了要避雨，就必須把傘撑直，此时傘柄是垂直的。此时观測者会感覚到雨絲好像是鉛垂綫一样，于是說："雨是直下的"。这种情况如圖70所示，在圖中 AB 为地面部分，B 表示"直下雨"，CD 为傘柄，这兒它是垂直的。向量 $\overrightarrow{EF}=\overline{w}$ 表示雨滴对于靜止地面落下的速度；此向量与靜止狀态中的观測者的傘柄平行。

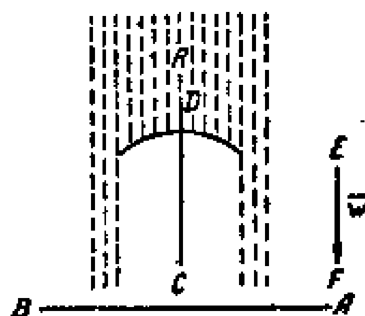


圖 70.

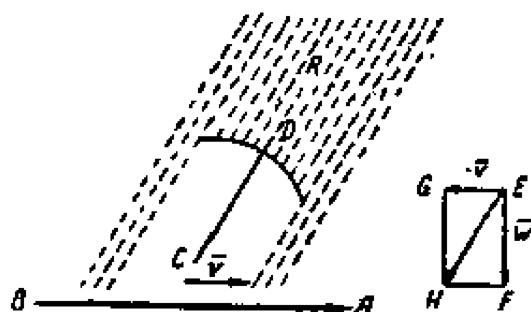


圖 71.

若观測者朝着由 B 到 A 的方向前进，其前进的速度与雨滴落下的速度相等，那么正像我們自己亲身体会到的那样，他所看到的雨就好像斜綫一样迎面落下来；他为了要避雨，就必須采取如圖71所示那样的措施，將傘傾向于自己的前进方向；此时傘柄 CD 是傾斜的，約与他看到的雨絲方向平行；于是观測者說："雨是斜下

的"。这也就是雨滴的落下对于前进着的观測者的相对运动。这一相对运动的速度之大小和方向以向量表示，即：

$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}=\bar{w}-\bar{v},$$

在此情况下，圖 71 中的傘柄 DC 与向量 $\overrightarrow{EH}$ 平行。

現在我們来研究光行差的影响。

光速等于 300,000 公里/秒；随同地球在空間对太陽轉动的观測者的速度每秒鐘約几十公里。这一速度对光速来説虽然不大，但与光速作比較时也不很小，因此它可以与光速相比較。

假設天文測量員在 N 点观測天体 σ，天体的方向垂直于观測員的运动方向 BA(圖 72)。若向量 $\overrightarrow{MN}=\bar{w}$ 表示由恒星 σ 發出来的光綫在空間的傳播速度，而向量 $\overrightarrow{MP}=\bar{v}$ 为观測者的运动速度，則星光对于运动着的观測者的相对速度按其大小及方向以向量 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}$ 表示。观測者在观測天体 σ 时，应当將它的望远鏡沿向量 $\overrightarrow{PN}$ 照准，因而他看見星 σ 在天球的 σ_1 点上。对不运动的观測者来說，天体被投影在天球上的 σ 点，此点假定地被称为天体的眞位置，而 σ_1 点是运动着的观測者所看到的这一天体，因此叫它为天体的視位置。天体的視方向与眞方向相差一角度 k。

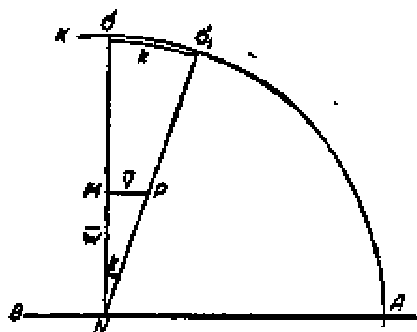


圖 72.

由三角形 NPM(圖 72)得：

$$\operatorname{tg} k=\frac{MP}{MN},$$

或

$$\operatorname{tg} k=\frac{v}{w}.$$

因为 $\bar{v}$ 比 $\bar{w}$ 小，所以 k 是一个小角；因此只取其展开式的第一項，而写为：

$$k \text{ arc } 1'' = \frac{v}{w},$$

由此得:

$$k = \frac{v}{w \text{ arc } 1''}. \tag{207}$$

現在我們来研究更普遍的情况，即天体的視方向与观测者的运动方向構成任意角度 u（圖 73）。

这与第一种情况相类似，故容易确信：观测者由于由 B 向 A 运动，所以在观測时应將望远鏡沿向量 $\overrightarrow{PN}$ 照准。

我們研究一下三角形 MPN（在此情况下，它是一个斜三角形）就可發現，它与前述的类似：$\overrightarrow{MN} = \bar{w}$, $\overrightarrow{MP} = \bar{v}$ 以及

$$\angle MPN = \angle PNA = u.$$

圖 73.

視方向 $N\sigma_1$ 与"真"方向 $N\sigma$ 的差角，以字母 a 表示。根据正弦定律可以写出:

$$\frac{\sin a}{\sin u} = \frac{MP}{MN},$$

或

$$\frac{\sin a}{\sin u} = \frac{v}{w},$$

由此得:

$$\sin a = \frac{v}{w} \sin u.$$

显然，a 角和 k 角一样，是一小角，故取:

$$a = \frac{v}{w \text{ arc } 1''} \sin u$$

有很高的精度。

或根据(207)式得:

$$a = k \sin u. \tag{208}$$

若 a 和 u 兩个角以其相应的弧 $\sigma\sigma_1$ 和 $\sigma_1 A$ 或 σA（因 a 微小，

又是在正弦的符号之后)代替，那么(208)式就可改写为另一种形式，即：

$$\sigma\sigma_1 = k \sin \sigma A. \tag{209}$$

因此，光行差现象，就是天体方向变动一个如(208)式所表示的 α 角的一种現象。

术語“光行差”，不仅是指現象本身，而且还包括光行差位移的数值 α 角。α 角通常叫做光行差角。値 k，根据它在（208）式和（209）式中的作用，称它为系数或光行差常数。在圖 72 和圖 73 中 KA 弧，是中心为 N 点的天球的一部分；因此 A 点就是观測者的运动方向与天球的交点。这个点叫做奔赴点。

归納起来，我們所闡述的光行差位移的一般定律可表述如下：在光行差的影响下，天体沿着通过天体和奔赴点的大圓弧朝着奔赴点位移。位移以(209)式表示：即

$$\sigma\sigma_1 = k \sin \sigma A,$$

式中 k 是光行差常数，而 σA 弧是天体到奔赴点的距离，它是按大圓弧量度的。同时，如上所述，由于 $\sigma\sigma_1$ 弧微小，另又因 σA 弧是取其正弦之値，所以这个弧由天体的視位置起算或由眞位置起算都沒有什么差别。

屬于天体眞位置的坐标叫做天体的眞坐标，給出視位置的坐标叫做天体的視坐标。

§54. 周年光行差

观測者在空間随同地球参加其繞太陽的周年运动。这一运动所引起的天体的視位移叫做周年光行差。

为了計算周年光行差对天体赤道坐标的影响，必須推导出能够由眞位置 α 及 δ 計算視位置以及反之由視位置計算眞位置的公式。为此，就必須知道周年光行差系数 k，并要确定周年光行差奔

赴点在天球上的位置。

为了要測定周年光行差系数，我們采用(207)式：

$$k=\frac{v}{w \operatorname{arc} 1''},$$

并將 $\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 的值代入此式。光速 $\bar{w}$ 如前面所說等于 300,000 公里/秒；地球在其繞太陽的周年运动时，它在軌道上的綫速度平均約为 30 公里/秒，即

$$\bar{w}=300,000 \text{ 公里/秒},$$
$$\bar{v}=30 \text{ 公里/秒}。$$

因而，周年光行差的系数或常数等于 20″.5，即

$$k=20''.5,$$

或者，更精确一些的是現时所采用的最近測定值

$$k=20''.47.$$

每一已知时刻的周年光行差奔赴点(瞬間奔赴点)由下列假定求得。

当研究这一問題时，近似地視地球繞太陽运动的軌道为一个正圓(圖 74)。假設地球在某一瞬間位于其軌道的 E 点上，并按箭头方向即按反时針方向循軌道运动。大家知道，物体沿曲綫运动，其速度总是按軌道的切綫方向前进的。所以，地球在軌道上的迅度，也是按表示地球 E 的軌道的圓之切綫方向 EA 前进的。

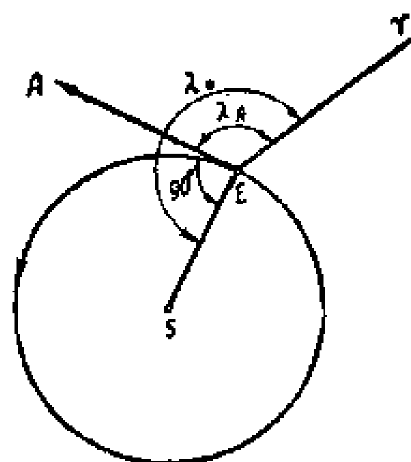


圖 74.

因而，方向 EA 是指向地球周年运动奔赴点的方向，亦即指向周年光行差奔赴点的方向。平面曲綫的切綫总是在此曲綫所在的平面上，在此即在黃道平面上，此平面与圖 74 的圖平面重合。因而，奔赴点 A 位于黃道的某一点上。这就是

說，奔赴点的黄緯 β_A 总是为零，奔赴点的黄經 λ_A，显然是随着地球 E 由軌道的一点向另一点移动而不斷地变化着。設 $E\Upsilon$ 是春分点的方向。由圖 74 可以看出，奔赴点的黄經 λ_A 以 $\angle\Upsilon EA$ 量度。太陽的黄經 $\lambda_{\odot}$ 同样地以 $\angle\Upsilon ES$ 量度，此角由 ΥE 方向开始逆时針进行計算。因为根据圓切綫的性質，$\angle AES$ 是一直角，所以奔赴点的黄經总要比太陽的黄經少 90°。于是，

$$\beta_A=0,\quad \lambda_A=\lambda_{\odot}-90^\circ. \tag{210}$$

一切恒星，在周年光行差的影响下，在一年内繞其真位置描繪出微小的橢圓；橢圓的長半徑为 20″.5，其短半徑則当星愈近黄道而愈小。

恒星的周年光行差位移，是詹姆斯·布拉得雷(1692—1762)于 1728 年观測天龙座天棓四發現的。他正确地解释了这一現象，即我們在本节和前节叙述的那些光行差理論，并近似地确定了折光差常数。

§55. 周年光行差对恒星的赤道坐标的影响

为了說明周年光行差对恒星的赤道坐标的影响，我們要求得恒星的視赤經和視赤緯与真赤經和真赤緯之差。設 α' 和 δ' 表示恒星的視坐标，α 和 δ 表示其真坐标。

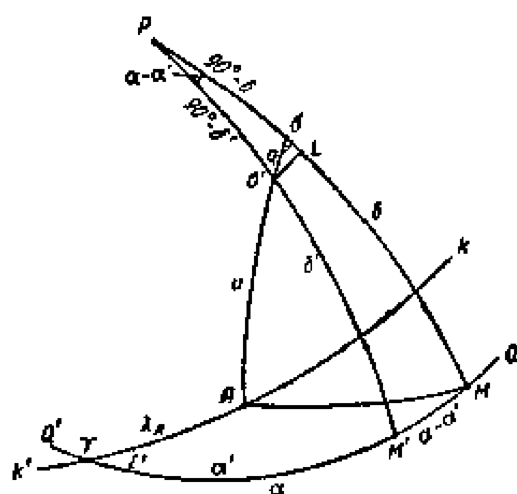


圖 75.

因而，我們的任务就是确定 $\alpha'-\alpha$ 和 $\delta'-\delta$ 之差。

为了导出 $\alpha'-\alpha$ 及 $\delta'-\delta$ 之差的計算式，我們来研究一下表示天球的某一部分的圖 75。

圖中 $Q'Q$ 为赤道，$k'k$ 为黄道，σ 是天体的真位置，A 是周年光

行差的奔赴点位置，P 是天極。用大圓弧联結天体 σ 及奔赴点 A，并在弧上截取

$$\sigma A = u \tag{a}$$

在朝向奔赴点的弧上：

$$\sigma\sigma' = k \sin u. \tag{б}$$

結果求得天体的視位置 σ'，这就是因周年光行差位移后的位置。

作赤經圈 $P\sigma M$ 和 $P\sigma' M'$ 及平行于赤道 $Q'Q$ 的小圓弧 $\sigma' L$，并用大圓弧 AM 联結 A 点和 M 点。現在直接由圖 75 可以看出：

$$\sigma M = \delta$$

$$\sigma' M' = LM = \delta',$$

因而

$$\sigma L = \delta - \delta', \tag{в}$$

式中 δ 和 δ' 分别为星的眞赤緯和視赤緯。

同样在赤道 $Q'Q$ 弧上有：

$$\Upsilon M = \alpha, \quad \Upsilon M' = \alpha'$$

因而：

$$\smile MM' = \alpha - \alpha',$$

而球面角：

$$\angle MPM' = \alpha - \alpha'.$$

小圓弧 $\sigma' L$，因其微小，可視为赤經圓 PM 的球面垂綫，并可把它看作是通过極其接近的兩点 σ' 和 L 的大圓弧。此时，在直角頂点为 L 的球面直角三角形 $P\sigma' L$ 中：

$$\angle MPM' = \alpha - \alpha',$$

和斜边

$$P\sigma' = 90° - \delta';$$

由此求

$$\sin \sigma' L = \sin(\alpha - \alpha') \sin(90° - \delta'),$$

或

$$\sin \sigma' L = \sin(\alpha - \alpha') \cos \delta',$$

或因 $\sigma' L$、$(\alpha - \alpha')$ 和 $(\delta - \delta')$ 为小量，故

$$\sigma' L = (\alpha - \alpha') \cos \delta; \tag{г}$$

也就是說，小弧和小角的正弦，可用此角度或弧代之；忽略 δ 与 δ

的微小差异，而在余弦的符号下用 δ 代 δ'。

現在我們来看直角頂也在 L 点的小三角形 $\sigma\sigma'L$。因其边短，故可視为平面三角形来解算。

因而，它的各边有这样的关系式：

$$\sigma L=\sigma\sigma'\cos q,$$

$$\sigma' L=\sigma\sigma'\sin q,$$

式中字母 q 表示 $\angle L\sigma\sigma'$。于是，根据(б)，(в)及(г)三式得：

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=-k\sin u\sin q,$$

$$\delta'-\delta=-k\sin u\cos q. \tag{д}$$

为了要求得 $\sin u\sin q$ 及 $\sin u\cos q$，我們来研究一下三角形 σAM。求得：

$$\sin u\sin q=\sin\sigma MA\sin AM,$$

$$\sin u\cos q=\cos AM\sin\delta-\sin AM\cos\delta\cos\sigma MA. \tag{е}$$

最后，注意到根据(210)式及圖 75 三角形 ΥAM 有：

$$\Upsilon A=\lambda_A=\lambda_{\odot}-90^\circ,\ \angle M\Upsilon A=\varepsilon,$$

$$\Upsilon M=\alpha;$$

則可求得下列关系式：

$$\cos AM=\cos\alpha\sin\lambda_{\odot}-\sin\alpha\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon,$$

$$\sin AM\sin AM\Upsilon=-\cos\lambda_{\odot}\sin\varepsilon, \tag{ж}$$

$$\sin AM\cos AM\Upsilon=\sin\alpha\sin\lambda_{\odot}+\cos\alpha\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon.$$

但是由于 $\angle\sigma MA+\angle AM\Upsilon=90^\circ,$

所以

$$\sin\sigma MA=\cos AM\Upsilon,$$

$$\cos\sigma MA=\sin AM\Upsilon. \tag{з}$$

因而，將(ж)式代入(е)式，并顧及(з)式，則得：

$$\sin u\sin q=\sin\alpha\sin\lambda_{\odot}+\cos\alpha\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon,$$

$$\sin u\cos q=(\cos\alpha\sin\lambda_{\odot}-\sin\alpha\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon)\sin\delta+$$

$$+\cos\lambda_{\odot}\sin\varepsilon\cos\delta. \tag{и}$$

將(и)式代入(д)式,得:

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=-k\sin\lambda_{\odot}\sin\alpha-k\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\cos\alpha,$$

$$\delta'-\delta=-k\sin\lambda_{\odot}\cos\alpha\sin\delta+k\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta-$$
$$-k\cos\lambda_{\odot}\sin\varepsilon\cos\delta.$$

以 $\cos\delta$ 除上式中的第一式，并將第二式最后兩項中的 $k\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon$ 提出于括号外;于是此式可改写为:

$$\alpha'-\alpha=-k\sin\lambda_{\odot}\sin\alpha\sec\delta-k\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\cos\alpha\sec\delta,$$

$$\delta'-\delta=-k\sin\lambda_{\odot}\cos\alpha\sin\delta-$$
$$-k\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon(\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta). \qquad (\text{к})$$

在公式(к)中，可將隨太陽的黃經 $\lambda_{\odot}$ 变化的因子提出，从而它們对一切恒星都具有相同的数値，但它們却因黃經 $\lambda_{\odot}$ 的变化而逐日在变化着。这种因子分別由以下的 C 及 D 等式确定:

$$C=-k\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon, \qquad (211)$$
$$D=-k\sin\lambda_{\odot}.$$

其余的因子仅依恒星的坐标而定，并且每一顆星都有其自己的数値,但这些因子的数値实际上是長时期保持不变的,这是因为恒星的坐标 α 及 δ 的变化很慢。这些因子我們用字母 c、d、c'、d' 表示,分別由下列各式确定:

$$c=\cos\alpha\sec\delta,$$
$$d=\sin\alpha\sec\delta,$$
$$c'=\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta, \qquad (212)$$
$$d'=\cos\alpha\sin\delta.$$

因为 $\alpha'-\alpha$ 之差通常是以时秒表示的，所以必須在 c 和 d 的計算式中引入系数 $\frac{1}{15}$,即將(212)式中的前二式改写为:

$$c=\frac{1}{15}\cos\alpha\sec\delta,\quad d=\frac{1}{15}\sin\alpha\sec\delta. \qquad (212')$$

根据(211)、(212)和(212′)三式中的符号，公式(к)可采用下

面極其簡單的形式:

$$\alpha'-\alpha=Cc+Dd,\quad \delta'-\delta=Cc'+Dd'. \tag{213}$$

(213)式与(211),(212)和(212′)三式供計算恒星視坐标与真坐标之差用。

有时,(213)式作以下的換算,变成另一种形式。假設:

$$C=h\sin H,\quad D=h\cos H, \tag{л}$$

$$i=C\operatorname{tg}\varepsilon.$$

將(212)式和(л)式代入(213)式,得:

$$\alpha'-\alpha=h\sin H\cos\alpha\sec\delta+h\cos H\sin\alpha\sec\delta,$$

$$\delta'-\delta=C\ \operatorname{tg}\ \varepsilon\cos\delta-h\sin H\sin\alpha\sin\delta+h\cos H\cos\alpha\sin\delta.$$

上二式还可改写为:

$$\alpha'-\alpha=h\sec\delta(\sin H\cos\alpha+\cos H\sin\alpha),$$

$$\delta'-\delta=h\sin\delta(\cos H\cos\alpha-\sin H\sin\alpha)+i\cos\delta,$$

或最后得:

$$\alpha'-\alpha=h\sin(H+\alpha)\sec\delta,$$

$$\delta'-\delta=h\cos(H+a)\sin\delta+i\cos\delta. \tag{214}$$

值 C 和 D 称为第一种归算值,值 h、H 和 i 称为第二种归算值。此兩种归算值都逐日載于"苏联天文年历"中(參閱"1953年的苏联天文年历",第一种归算值載于116—123各頁上,第二种归算值載于124—131各頁上)。

值 c、d、c' 和 d' 通常称为恒星归算常数或恒星归算值。

周年光行差通常与岁差、章动以及恒星自行同时計算,关于这一点將在第七章內作詳細論述。

§56. 周日光行差

观測者除了周年运动外,还要参加地球的周日运动。由于观測者的这一运动而产生的天体位移称为周日光行差。

此时,观測者的运动是循着与通过观測地的地理緯圈相重合

的大圓进行的。

現在來求周日光行差的系数及奔赴点。光行差系数通常以(207)式表示:

$$k=\frac{\bar{v}}{\bar{w}\ \mathrm{arc}\ 1''},$$

式中 $\bar{v}$ 是观測者的运动速度。对于赤道上的点来說，不难計算出它因地球旋轉而产生变位的綫速度 $\bar{v}_0$。$\bar{v}_0$ 等于地球赤道的圓周除以一恒星日内的平时秒数，即

$$\bar{v}_0=\frac{2\pi R}{T},$$

式中地球半徑 $R=6378$ 公里，一恒星日内的平时秒数 $T=86164^s$。

作完必要的演算后得:

$$\bar{v}_0=0.464\ 公里/秒。$$

$\bar{w}$ 是光速，当然仍为前值，即等于 300,000 公里/秒。計算得:

$$k_0'=0''.32,$$

式中 k_0' 表示 $\varphi=0$ 的地面点（即位于赤道上的点）的周日光行差系数。

对緯度为 φ (圖 76) 的 M 点来說，其周日轉动的角速度是和赤道上的点相同的，但綫速度 v，則稍有不同。由力学知道，若两点轉动的角速度相等，則它們的綫速度与此两点所画的圓之半徑成比例。若 M 点緯圈的半徑为 r，而視为球体的地球的半徑为 R，則

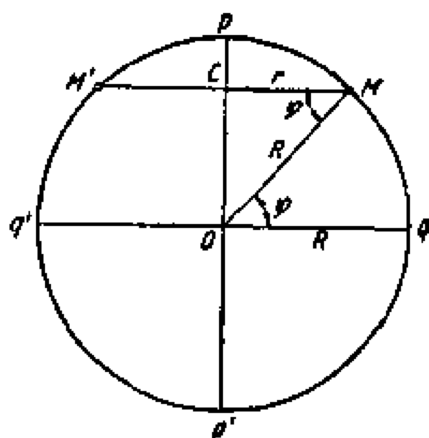


圖 76.

$$\frac{v_\varphi}{v_0}=\frac{r}{R}.$$

由三角形 MCO 得:

$$r = R\cos\varphi,$$

因而
$$v_\varphi = v_0 \cos\varphi,$$

由此得:
$$k'_\varphi = 0''.32\cos\varphi. \qquad (215)$$

若点沿着圓周移动，则它的瞬間速度总是沿圓的切綫方向朝着点的运动方向前进的。若从北極按逆时針方向来看，那么地球的周日轉动是由西向东进行的。于 M 点作地理緯圈 MM' 的切綫 ME(圖 77)，若再注意到小圓的切綫也就是整个球的切綫，那就不难确信：直綫 ME 是垂直于鉛垂綫 MZ 的，即它是位于 M 点的地平面內的，此地平面在圖中是以 $SENW$ 表示的，除此之外，它还要垂直于 M 点的子午圈面即垂直于圖平面，因而也就垂直于日中綫 NS。由此得出結論，观测者的运动速度总是指向东点的，因而东点 E 就是周日光行差的奔赴点。

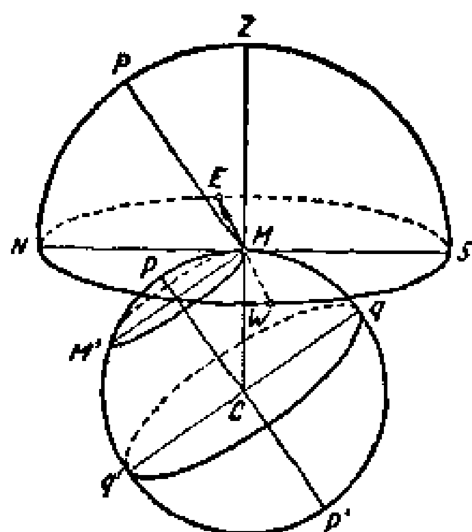


圖 77.

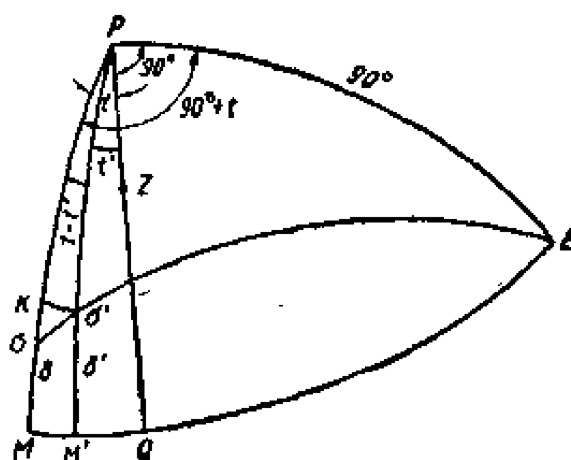


圖 78.

因此，根据光行差位移的一般定律，可以說：在周日光行差的影响下，天体循大圓弧 σE 向东点方向移动 $\sigma\sigma'$ 弧(圖 78)，此弧可由(209)关系式来求得:

$$\sigma\sigma' = 0''.32\cos\varphi\sin\sigma E, \qquad (216)$$

式中 σE 是天体和东点間的大圓弧。

§57. 周日光行差对恒星坐标的影响

現在我們来研究周日光行差对天体的赤經和赤緯的影响，并且順便研究一下对于时角的影响.

看一下圖78，它是天球的一部分，P、Z 及 E 三点分别为天極、天頂及东点；PZQ 是子午圈，MQE 是赤道，PE 是垂直于子午圈的时圈($t=18^h$)。

設 σ 是某天体的眞位置。在周日光行差的影响下，它像我們所知道的那样，沿着通过天体和东点的大圓弧 σE 向着周日光行差的奔赴点移动，即向着东点移动，移到 σ' 点的位置。$\sigma\sigma'$ 弧按(216)式确定，即：

$$\sigma\sigma'=0''.32\cos\varphi\sin\sigma E.$$

因而，σ' 点是天体 σ 的視位置。通过天体的眞位置和視位置作赤經圈 PM 和 PM'。于是

$$M\sigma=\delta;\quad \angle QP\sigma=t;$$

$$M'\sigma'=\delta';\quad \angle QP\sigma=t'.$$

其中有一撇的表示天体的視坐标。

由 σ' 点向赤經圈 PM 引一球面垂綫 $\sigma'K$。因垂綫很短，故可視它为通过 σ' 和 K 两点的大圓弧或視为以 P 点为中心的小圓弧。这样就可写成：

$$\sigma K=\delta'-\delta. \tag{a}$$

現在我們来研究直角球面三角形 $PK\sigma'$。其中角 $PK\sigma'=90°$，边 $P\sigma'=90°-\delta'$，而角 $KP\sigma'=t-t'$；由圖显而易見，$\angle KP\sigma'$ 即为眞时角与視时角之差。按納白尔-莫裘規則解此三角形得：

$$\sin K\sigma'=\sin(t-t')\cos\delta',$$

或因 $K\sigma'$ 和 $(t-t')$ 微小，可写为：

$$K\sigma'=(t-t')\cos\delta'. \tag{6}$$

現在再来研究三角形 $\sigma\sigma' K$，由于它的边非常短，幷按照它的結構，可以將它看作为平面三角形而解算之，得:

$$\begin{aligned} \sigma K &= \sigma\sigma' \cos P\sigma E, \\ \sigma' K &= \sigma\sigma' \sin P\sigma E. \end{aligned} \tag{в}$$

分别將(а)和(б)兩式的右边代替上二式的左边，幷按(216)式代替 $\sigma\sigma'$，則(в)式可改变为下列形式:

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= 0''.32 \cos\varphi \sin\sigma E \cos P\sigma E, \\ (t - t') \cos\delta' &= 0''.32 \cos\varphi \sin\sigma E \sin P\sigma E. \end{aligned} \tag{г}$$

$\sin\sigma E \cos P\sigma E$ 和 $\sin\sigma E \sin P\sigma E$ 的乘积，可由球面三角形 $PE\sigma$ 求得。在此三角形中：因 E 点位于赤道上，故边 $PE = 90°$，边 $P\sigma = 90° - \delta$，而 $\angle \sigma PE = 90° + t$。这一些在圖上是显而易見的。

按五元素公式得:

$$\sin\sigma E \cos P\sigma E = \cos 90° \cos\delta - \sin 90° \sin\delta \cos(90° + t),$$

或

$$\sin\sigma E \cos P\sigma E = \sin\delta \sin t. \tag{д}$$

按正弦定律得:

$$\sin\sigma E \sin P\sigma E = \sin 90° \sin(90° + t),$$

或

$$\sin\sigma E \sin P\sigma E = \cos t. \tag{е}$$

將(д)和(е)二式代入(г)式得:

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= 0''.32 \cos\varphi \sin\delta \sin t, \\ (t - t') \cos\delta' &= 0''.32 \cos\varphi \cos t. \end{aligned} \tag{217}$$

因对同一时刻的天体的真位置和視位置而言，可写成

$$t = s - \alpha, \quad t' = s - \alpha';$$

所以上二式相减，得:

$$t - t' = \alpha' - \alpha. \tag{ж}$$

將(ж)式代入(217)式中的第二式，其中系数 $0''.32$ 以时秒表示，$\cos\delta'$ 以 $\cos\delta$ 代替，幷以 $\cos\delta$ 除等式的兩边，最后得:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0^s.021 \cos\varphi \sec\delta \cos t, \\ \delta' - \delta &= 0''.32 \cos\varphi \sin\delta \sin t, \end{aligned} \tag{218}$$

式内：α'、δ' 为天体的最終視坐标，而 α、δ 为未顧及周日光差的天体視坐标。

(218)式供計算周日光行差对天体赤道坐标的影响之用，并且在其右边的三角公式的符号后，代入視坐标或代入真坐标并無区别。

由这些公式可以看出：在子午圈上，此时 $\cos t=\pm1$，周日光行差对赤經的影响之絕对值为最大；当 $t=6^h$ 或 18^h 时，$\cos t=0$，周日光行差对 α 完全不發生影响。

反之，当 $t=6^h$ 或 18^h，$\sin t=\pm1$ 时，周日光行差对赤緯的影响之絕对值为最大；而在子午圈上赤緯完全沒有变化，因为此时 $\sin t=0$。

特別应当指出：由于因子 $\sec\delta$ 和 $\sin\delta$ 的存在，周日光行差的影响一般說来是很小的，对具有大赤緯的恒星才达到較为显著的数值。

因此，通常只对具有由 80° 到 90° 的大赤緯的恒星，主要对極星(大熊座天樞，小熊座勾陈一)，才計算周日光行差的影响。

在不要求特別精密的情况下，对于赤緯小于 80° 的恒星，經常不計算周日光行差的影响。

例

不計周日光行差的影响，在某日莫斯科恒星时

$$s=11^h43^m.9$$

瞬間的小熊座勾陈一(極星)的視坐标为：

$$\alpha=1^h39^m18^s.73,\quad \delta=+88°57'42''.92.$$

試計算周日光行差的影响及最終的改正視坐标。

莫斯科的地理坐标为：

$$\lambda=2^h30^m.7E;\quad \varphi=+55°45'.6.$$

本題按(218)式解算。若 $\alpha'-\alpha$ 和 $\delta'-\delta$ 分別以 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 表示，并按上述公式計算

之，則極星的最終視坐标可按下式計算之:

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha,\quad \delta' = \delta + \Delta\delta. \tag{219}$$

解:

φ	55°45′.6
δ	88 57 .7
s	$11^h43^m.9$
α	1 39 .3
t	10 4 .6
t	151° 9′ .0

按对数表計算

lg0ˢ.021	8 .322
lg cos φ	9 .750
lg sec δ	1 .742
lg cos t	9 .943$_n$
lg $\Delta\alpha$	9 .757$_n$
$\Delta\alpha$	−0ˢ.571
lg 0″.32	9 .505
lg cos φ	9 .750
lg sin δ	0 .000
lg sin t	9 .684
lg $\Delta\delta$	8 .939
$\Delta\delta$	0 .087

用計算机計算

k'	0ˢ.021
cos φ	0 .563
sec δ	55 .215
cos t	− 0 .876
$\Delta\alpha$	− 0ˢ.571
k'	0″.32
cos φ	0 .563
sin δ	1 .000
sin t	0 .482
$\Delta\delta$	0″.087

用对数計算尺計算求得:

$$\Delta\alpha = -0^s.570;\ \Delta\delta = 0''.087.$$

我們用計算机和对数表求得的 $\Delta\alpha$ 完全相同; 用計算尺算得的結果与用計算机和对数表算得之結果相差 $0^s.001$, 这是由于凑整誤差和讀数誤差的緣故, 但实际上这个差不起什么作用。$\Delta\delta$ 用三种方法求得的結果都是一致的。

为了下一步的計算,將它們凑整至 $0^s.01$ 及 $0''.01$:

$$\Delta\alpha = -0^s.57;\ \Delta\delta = 0''.09.$$

用上值按下列格式計算 α' 和 δ':

α	$1^h 39^m 18^s.73$
$\Delta\alpha$	$-\ 0\ .57$
α'	$1^h 39^m 18^s.16$
δ	$+88^\circ 57'\ 42''.92$
$\Delta\delta$	$+\ 0\ .09$
δ'	$+88^\circ 57'\ 43''.01$

第六章　岁差·章动·恒星自行

§58. 岁差的力学本質·基本平面在空間的位移；天球上的基圈及基点的位移

在本章中，我們將討論由于基本平面在空間的位移所引起的天体坐标的变化，而这些基本平面乃是計算天体坐标的基础。

我們一向認为，赤道面和黃道面是固定不动的，并且由此二平面所決定的天球大圈——赤道和黃道——在天球上的位置也是不变的。事实上并非如此，因为决定赤道面位置的地軸在空間的方向不是固定不变的，而是画出一个口徑約为 47° 的园錐面，它旋轉一周的周期为 26,000 年；地球的軌道面即黃道面同样也有此变动，这是由于其他行星尤其是木星对地球公轉的攝动作用所致。这兩种現象叫做岁差：前一种叫做日月岁差，因其原因主要是月亮以及太陽的引力对地球自轉的扰乱作用；后一种叫做行星岁差。行星岁差很小，对天体位置的影响不大，所以我們暫不談它。至于日月岁差，則將作較詳細的討論。

茲簡單說明这种現象。

地球的形狀近乎旋轉橢圓体。它大致可用一个外繞赤道环 $AQGA_1Q_1G_1$ 的球体 E 来表示（圖 79）

月球 M 并不处在地球赤道面上；它吸引着地球体內各个部分的質点，按牛頓定律，其引力大小与距离的平方成反比。对球体 E 来說，这些引力之和是合力 ER，它循直綫 EM 的方向作用于球体 E 的中心。这一合力使地球沿月球方向产生某一加速度运动。

对分布于赤道环上各个質点的引力，同样地可以合成，而用兩

个合力 AB 和 A_1B_1 表示之，它們分别作用于适当选擇的正相对称的环上兩点A和 A_1。因为我們能够用一个平面將全环分成兩半，此平面是經过地軸 pp' 与圖平面垂直的，即与平面 EMP 垂直的，这样就可單独地求得每一半环的引力的合力。由于地球的大小与其至月球的距离(尤其是到太陽的距离)相比是很小的。所以我們可以把此二力看作是平行的。然而，它們并不彼此相等：力 AB 要比 A_1B_1 大，这是由于右半环較左半环接近月亮之故。

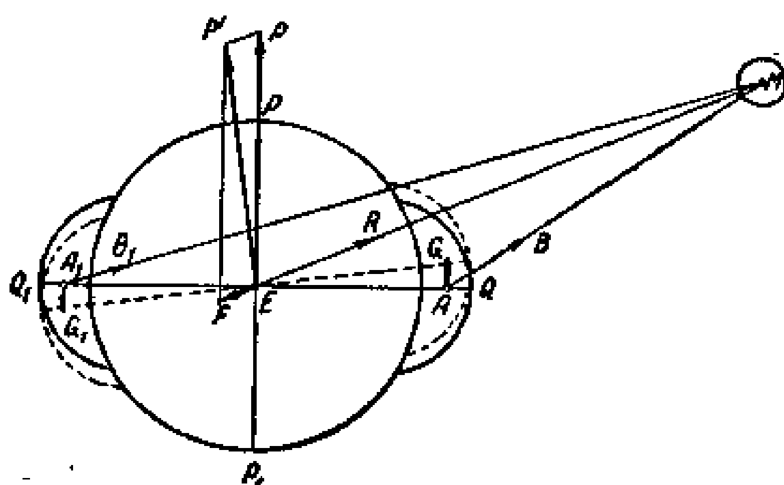


圖 79.

由力学知道，这兩个力可用合力和合力偶来代替。实际上，朝同一方向的二平行力的合力等于該二力之和，且方向不变；而合力的作用点則位于二分力作用点的連綫上，其与此兩点的距离跟二分力的大小成反比。因而，AB 和 A_1B_1 二力之合力 DL(圖 80)等于該二力之和，作用点D并非位于地球中心E，而是靠近大力AB的作用点即A点。設有 EN 与 EN_1 二力作用于地球中心E，此二力与 DL 平行，大小相等，方向相反。將力 EN 与合力

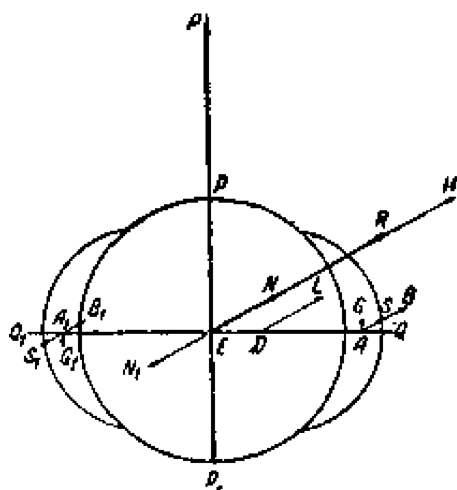


圖 80.

ER 相加；其和在圖 80 以向量 EH 来表示。DL 和 EN_1 二力構成一力偶，此力偶可用与其等量的 AS 与 A_1S_1 的力偶来代替，但此兩力偶的力矩必須相等。在同样的条件下，力偶 $AS—A_1S_1$ 可用力偶 $AG—A_1G_1$ 来代替。

于是，合力 EN 与力 ER 相加，只能增加地球本身在 EM 方向上的总加速度；合力偶可用力 AG 与 A_1G_1 来表示，其力偶臂为 AA_1。由圖 79 可以看出，这一力偶使地球在 $MAEA_1$ 平面上轉动，以致赤道面 QQ_1 要与 EM 方向重合。因此，地球应有兩种旋轉运动：圍繞 pp_1 軸的周日轉动；及由于力偶 $GA—G_1A_1$ 的作用所引起的轉动。在这样的情况下，我們由力学知道，若兩个力偶的轉动力矩如向量一样按平行四边形法則相加，則求得物体所具有的合成轉动。而力偶所引起的轉动力矩以在轉軸方向上的向量来表示，其向量的大小与力及力偶臂的乘积成正比。

設周日轉动的力矩以向量 EP 来表示（見圖 79），由力偶 $AG—A_1G_1$ 所引起的轉动力矩用与圖面垂直的向量 EF 来表示。此时，平行四边形 $EPP'F$ 的对角綫向量 EP' 是轉动的最后結果。因此，由于月球的引力对地球赤道部分的影响，使地軸由 EP 位置移至 EP' 位置。太陽对地軸的影响也是这样。月亮和太陽的引力作用是不間断的。

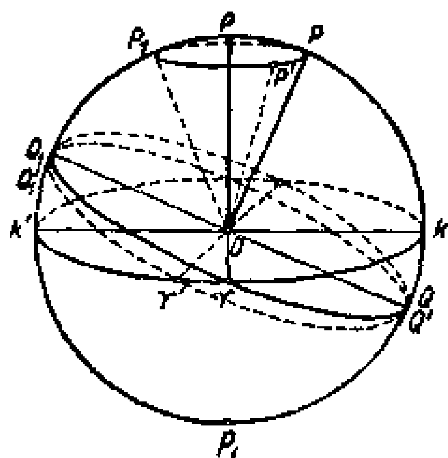


圖 81.

地軸的位置同样也在不断地变化着，因此不得不談到地球瞬时轉軸的位置；可以証明，瞬时轉軸与黃道軸 pp_1（圖 81）間大致保持不变的角値（23°27′）而轉移着，即描画一圓錐面，此圓錐的軸为黃道軸 pOp_1。

由于天軸 OP 永远是与赤道面垂直的，故無論是天球的或地球的赤道面（此二面始終相互平行）都一样，隨同地軸或始終与地軸平行的天軸移轉。因此，若天軸由位置 OP 移至 OP'，即天極由天球上的 P 点移至 P' 点，則赤道也由位置 QQ_1 移至 $Q'Q_1'$ 位置，而赤道与黃道的交点即春分点由位置♈移至♈′位置。天極按順时針方向描画出一个中心为黃極 P 的天球小圓，其半徑約为 $23°27'$；春分点沿着黃道和赤道迎向着太陽的周年运动移动。二分点旋轉一整周需 26,000 年，故每年的位移約为 $50''.2$。

由于春分点是迎向太陽周年运动移动的，所以下一次春分日較太陽繞行 360° 而回到原来的春分点位置要早。因而称这种現象为岁差。

太陽接續兩次經过春分点間的时間間隔，正如我們所知道的称为一回归年，它等于 365.2422 平太陽日。太陽繞行 $360°0'0''$ 所需的时間間隔，也就是太陽对任一遙远而無显著自行的恒星所作的視周年运动中所需的时間，叫做一恒星年。恒星年比回归年長，所長者为太陽經过弧 ♈♈′ $= 50''.2$ 所需的时間，即長 0.0142 天，故象我們所知道的那样，一恒星年等于 365.2564 平太陽日（参閱 §35）。

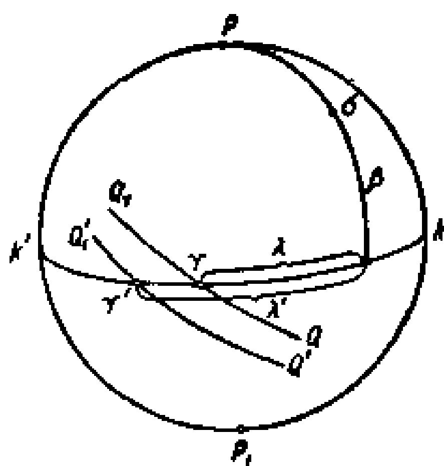


圖 82.

从圖 82 可以看出，由于岁差的緣故，所有恒星的黃經 λ，每年增加同一数值，即增加 ♈♈′ $=50''.2$；但黃緯 β 却毫無变化。至于赤經、赤緯，則可从圖 83 看出，它們是有变化的。圖中 $k'k$ 为黃道，P 和 P'、QQ_1 和 $Q'Q_1'$ 是在某兩个瞬間的天極和赤道的位置。其实，如果我們以 α 和 δ 表示恒星在某一瞬間 t 的坐标，以 α' 和 δ' 表示其在另一

瞬間 t' 的坐标，則可从圖上求得某天体 σ 的坐标：

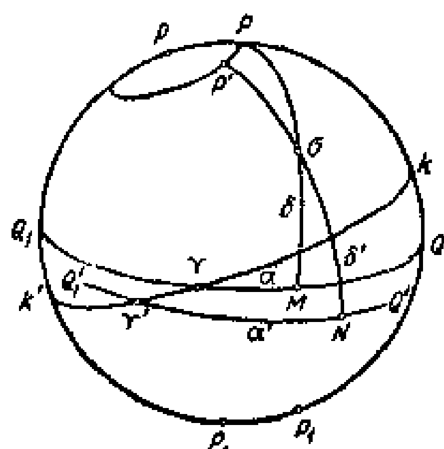


圖 83.

$$\alpha = \Upsilon M, \qquad \delta = M\sigma;$$

$$\alpha' = \Upsilon' N, \qquad \delta' = N\sigma.$$

在 § 59 中，我們將推导出計算岁差对 α 和 δ 的影响的公式。这里只着重指出，若已知某天体的赤道坐标，則应該指明天体所屬的瞬間或通常所說的**历元**，例如大熊座中的第一顆星大熊座天樞的坐标：

1922.0 年 $\alpha = 10^h\,58^m\,55^s.68, \quad \delta = +62^\circ 10'26''.56;$

1953.0 年 $\alpha' = 11^h\ 0^m\,50^s.63; \quad \delta' = +62^\circ\ 0'18''.46.$

关于岁差的更詳細的說明，应在地球及太陽系的起源及其發展的历史上去找。但可惜的是，即使近代研究出的最完善的宇宙論，即科学院院士 O. Ю. 斯密特的學說，对此問題也未給出徹底的答复。这个学說很完滿地說明了：所有的大行星（冥王星除外）的軌道面，大部分的小行星（約 70%）的軌道面，木星的最近五个衛星的軌道面，月球的軌道面，太陽及木星的赤道面都与黃道面接近重合；大部分的行星及其衛星的自轉和公轉的方向相同。但对于地球赤道面对黃道面有相当大的傾角（23°.5），以及某些大行星的傾角，例如火星的傾角（24°），土星的傾角（28°）等等，在現时的宇宙論中，不論在斯密特学說中，或在双宇宙假設中，都未加以解釋。

日月岁差現象，是希臘天文学家、著名的古代天文学家依巴谷所發現的；他是紀元前二世紀的人。岁差的力学原理为牛頓（1643—1727）在其 1687 年出版的“自然哲学的数学原理”一書中所闡明的。完整的岁差理論，为苏联科学院院士歐拉（1707—1783）在其大作“剛体轉动論”（1790）中所闡明。

發現岁差后的几百年內，各国的許多学者，如依巴谷、托勒密、

烏盧格－别克、牛頓、白塞尔、列凡里等进行了多次的岁差常数的测定，测定的精度不断地提高。苏联研究这一問題的学者，有О. В. 斯特魯維、Х. А. Ф. 别捷尔斯、Л. О. 斯特魯維、Н. Н. 巴利斯基、К. Ф. 奥戈罗德尼科夫、В. Г. 費森柯夫、Н. И. 依捷里松等人。

§59. 岁差对恒星坐标的影响

計算岁差影响，也就是計算某一恒星的坐标变化。已知某一恒星对某一瞬間的坐标圈、点的位置，將其化为对另一确定瞬間的坐标系的位置。在这种情况下，通常以含意相同的术語“历元”来代替术語“瞬間”。因为春分点的位置对决定坐标系的位置最具有代表性，故經常將“化恒星坐标为对某历元的坐标系的位置”簡單地說成“化恒星坐标为对某分点的位置”。显然，問題只在于計算在某兩个不同历元 T 与 T' 时的恒星坐标之差。此問題，因恒星的赤緯、兩历元相隔的时間及所要求精度的不同，而采用各种方法解算。

現在我們来研究实际工作中最常見的情况：即恒星的赤緯不近于 90°，兩历元間的时間間隔不很大。

設已知历元为 $T=1900+t$

的恒星赤道坐标是 α 和 δ，在历元 $T'=1900+t'$ 的赤道坐标以字母 α' 和 δ' 表示。

因赤道坐标随时間不断地变化，故可視坐标 α 和 δ 为时間的函数，即假設：

$$\alpha=f_1(t),\qquad \delta=f_2(t)。$$

在上述 δ 不近于 90°，和差数

$$T'-T=t'-t$$

不大的条件下，恒星坐标 α 和 δ 变化是緩慢的，我們可表示为

$$\alpha'=f_1(t'),\qquad \delta'=f_2(t'),$$

并展开为台劳級数:

$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=\frac{t'-t}{1}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{(t'-t)^2}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{(t'-t)^3}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3}+\cdots\cdots,\\ \delta'-\delta&=\frac{t'-t}{1}\frac{d\delta}{dt}+\frac{(t'-t)^2}{2}\frac{d^2\delta}{dt^2}+\frac{(t'-t)^3}{6}\frac{d^3\delta}{dt^3}+\cdots\cdots。\end{aligned}\tag{220}$$

若时間間隔 $t'-t$ 为微量，則在展开式中，往往可以只取含一次导数之項；大半取至二次項。在少数的場合下需取至三次項。

現在我們的問題，在于求展开式中的导数表达式，首先求 α 和 δ 对 t 的一次导数，即：

$$\frac{d\alpha}{dt}\text{及}\frac{d\delta}{dt}。$$

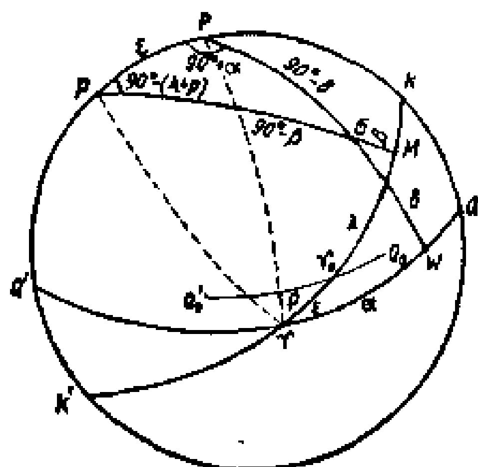


圖 84.

为此，参看圖 84，在圖中：

kk' 为黃道，p 为黃極，$Q_0'Q_0$ 为在历元 1900.0 时的赤道，$Q'Q$ 为在历元 $1900+t$ 时的赤道，P 为在历元 $1900+t$ 时的天極，Υ_0 为在历元 1900.0 时的春分点的位置，Υ 为在历元 $1900+t$ 时的春分点的位置，σ 是在历元 $1900+t$ 时的坐标为 α 和 δ 的恒星。

于圖上作出此星的坐标：

$$\left.\begin{aligned}\smile\Upsilon W&=\alpha\\ \smile W\sigma&=\delta\end{aligned}\right\}\text{历元为 }1900+t;$$

$$\left.\begin{aligned}\smile M\sigma&=\beta\\ \smile\Upsilon_0 M&=\lambda\end{aligned}\right\}\text{历元为 }1900.0.$$

在兩个春分点 Υ_0 与 Υ 位置間的黃道弧，是由历元 1900.0 至历元 $1900+t$ 的整个时間間隔 t 内的日月岁差 p，即：

$$\smile\Upsilon_0\Upsilon=p.$$

兹察看恒星的坐标三角形 $Pp\sigma$。在此三角形中:

$$P\sigma=90^\circ-\delta,\quad p\sigma=90^\circ-\beta,\quad Pp=\varepsilon;$$

式中ε为黃道$k'k$对赤道$Q'Q$的傾角;在天極上的$\angle pP\sigma=90^\circ+\alpha$,在黃極上的$\angle Pp\sigma=90^\circ-(\lambda+p)$。

由三角形 $Pp\sigma$ 中可求得:

$$\begin{aligned}\sin\delta&=\sin\beta\cos\varepsilon+\cos\beta\sin\varepsilon\sin(\lambda+p),\\ \cos\delta\sin\alpha&=-\sin\beta\sin\varepsilon+\cos\beta\cos\varepsilon\sin(\lambda+p),\\ \cos\delta\cos\alpha&=\cos\beta\cos(\lambda+p).\end{aligned}\tag{a}$$

欲求所需的导数,首先微分(a)的前二式,視 α、δ 和 p 为变数,視 β、λ 和 ε 为常数。

微分(a)的第一式得:

$$\cos\delta\, d\delta=\cos\beta\sin\varepsilon\cos(\lambda+p)dp,$$

用(a)的第三式进行代替乘积 $\cos\beta\cos(\lambda+p)$,得:

$$\cos\delta\, d\delta=\cos\delta\cos\alpha\sin\varepsilon\, dp,$$

約去 $\cos\delta$ 則得:

$$d\delta=\cos\alpha\sin\varepsilon\, dp.\tag{б}$$

微分(a)的第二式得:

$$-\sin\varphi\sin\alpha\, d\delta+\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha=\cos\beta\cos\varepsilon\cos(\lambda+p)dp,$$

將上式左边的第一項替至右边,并按(a)的第三式代替右边的乘积 $\cos\beta\cos(\lambda+p)$,則得:

$$\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha=\sin\delta\sin\alpha\, d\delta+\cos\varepsilon\cos\delta\cos\alpha\, dp.$$

以(б)式的右边代替 $d\delta$:

$$\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha=\sin\delta\sin\alpha\cos\alpha\sin\varepsilon\, dp+\cos\varepsilon\cos\delta\cos\alpha\, dp,$$

除以 $\cos\delta\cos\alpha$ 得:

$$d\alpha=(\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon+\cos\varepsilon)dp.\tag{в}$$

今將(σ)及(в)二式逐項除以dt,求得导数:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dt}&=\sin\varepsilon\cos\alpha\frac{dp}{dt},\\ \frac{d\alpha}{dt}&=\cos\varepsilon\frac{dp}{dt}+\sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\frac{dp}{dt}.\end{aligned}\tag{221}$$

引入符号： $\sin\varepsilon\frac{dp}{dt}=n;\quad \cos\varepsilon\frac{dp}{dt}=m.$ (222)

若 dt 等于一年，則$\frac{dp}{dt}$即为周年日月岁差；n 和 m 叫做岁差常数，它們显然分别为周年岁差在分圈和赤道上的投影；因而 n 是赤緯的周年岁差常数，m 是赤經的周年岁差常数。

运用这些符号，將(221)式改写为：

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta;\quad \frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha. \tag{223}$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ 叫做赤經的周年岁差，而 $\frac{d\delta}{dt}$ 叫做赤緯的周年岁差。(223)式說明了，此二导数不仅与岁差常数 m 和 n 有关，而且还与恒星的坐标有关。

目前采用的岁差常数 m 和 n (1900.0)之值为：

$$m=46''.085,\quad n=20''.047.$$

因赤經的周年岁差的数值以时秒表示較为方便，故在 $\frac{d\alpha}{dt}$ 式中必須加入系数$\frac{1}{15}$，或將系数 m 与 n 以时秒表示。为了表示这些值的單位，通常写为：

m'' 和 n''，表示以度秒作單位；

m^s 和 n^s，表示以时秒作單位。

今再列出常数 m 和 n 之最近値(1900.0)：

$$m^s=3^s.072,\qquad n^s=1^s.336.$$

在級数展开式(220)中只取其第一項，导数 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 以其表达式(223)代之，則可求得 $\alpha'-\alpha$ 和 $\delta'-\delta$ 的表达式：

$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=(m^s+n^s\sin\alpha\ \mathrm{tg}\delta)(t'-t),\\ \delta'-\delta&=n''\cos\alpha(t'-t).\end{aligned} \tag{224}$$

上式为第一近似式，在所要求的精度不高，时間間隔 $t'-t$ 很

小，而恒星的 δ 不近于 90° 的情况下可以应用。

直到現在为止，我們还沒有或者几乎沒有談及行星岁差。但当問題涉及到更精确地計算岁差的影响时，行星岁差是不可忽視的。我們一向假設黃道是不移动的，因而它始終在天球上保持着原来的位置。但实际上并非如此。

我們知道（參閱§7及§29），黃道是以月地重心繞太陽的周年运行所确定的。若太陽系只由这三个天体組成，則月地重心繞太陽运行的軌道便是一橢圓形的平面曲綫。但是除了地球及其衛星以外，尙有八个大行星圍繞着太陽运行，此八个大行星的質量一部分小于地球，另一部分比地球大得多，所以月地系重心的正規的橢圓运动或所謂克普勒运动遭到破坏，也可說被这些行星对地球和月球的引力所攝动。这种攝动的表現各有不同。这里对我們特别重要的是，由于行星引力的攝动作用，日月系重心的軌道面不能保持不变。此軌道面在空間的变动大致上是如此：它在天軸周圍微微地轉动，同时它对固定赤道面的傾角也隨之变化，但这种变化是很小的。因此，我們必須說一下月地重心的瞬时軌道面。我們將此瞬时軌道面定义为这样的平面，它是通过太陽中心、月地系重心以及重心在其繞太陽的軌道运动中的瞬时速度向量的平面。瞬时軌道面的运动可分为兩类：卽圍繞太陽中心的長期的緩慢的运动和許多小的周期性振动。

設有一平面通过太陽中心和月地重心，且与月地系重心的瞬时軌道面極其靠近，它只具有長期运动，而不發生小的周期性振动。此平面可称为月地重心的平均軌道面。显然，瞬时軌道面是跟隨着平均軌道面的，并在它的附近振动，但只是周期性地稍許上下离开着它。

現在我們可以給黃道面下一个严密的定义：黃道面是一个与月地系重心的平均軌道面平行或重合的平面，也就是与通过太陽

中心且仅具有月地系重心的瞬时軌道面的長期运动的平面相平行或重合的平面。

因而，黄道的严密定义是：黄道是天球与月地系重心的平均軌道平面相交而得的天球大圈，或天球与平行于此平均軌道面的平面相交而得出的天球大圈。因而，黄道具有和黄道面相似的或和月地系重心的平均軌道面相似的緩慢的長期运动。黄道的这种緩慢的長期运动就是行星岁差。

設在圖 85 中的 $Q_0'Q_0$ 为在历元 1900.0 时的赤道位置，而 $Q'Q$ 为在历元 1900.0+t 时的赤道位置。同样設 $k_0'k_0$ 为在起始历元 1900.0 时的黄道，而 $k'k$ 为在历元 1900+t 时的黄道。起始历元 1900.0 时的黄道或在它以前的历元 1850.0 时的黄道通常叫做不变的或固定的黄道。在圖 85 上 Υ_0 为在历元 1900.0 时的春分点位置，因为它是在历元 1900.0 时的赤道和黄道的交点；Υ 为在历元 1900.0+t 时的春分点位置，这同样是因为它是在此历元 1900+t 时的赤道和黄道的交点。假如我們和以前一样，不管行星岁差把黄道看作是固定的，那末我們就会在 Υ' 点得出春分点位置。由此我們可看到：黄道已由 $k_0'k_0$ 移至 $k'k$ 位置；并且黄道对赤道的傾角也稍有变化，即使如上所述，这一变化是極其微小的也好。因而 ε 角是不等于角 ε'，其間有微小的差异。

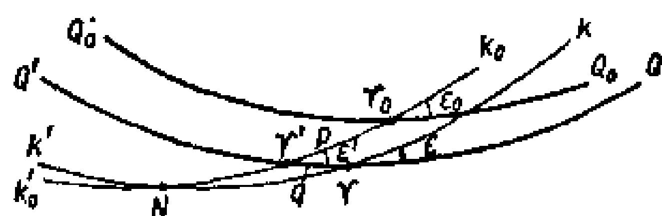


圖 85.

固定黄道上的弧 $\Upsilon_0\Upsilon'$ 就是我們已經熟識的日月岁差 p，而变动后赤道 $Q'Q$ 上的弧 $\Upsilon'\Upsilon$ 是我們所关心的行星岁差，它以 q 表示。在此，行星岁差这一术語所表示的，已不是前述的全部现象，而是在其实际計算中所必須顧及的数字結果。我們根据前述的許多情况，早已知道了这一术語。

故可写为: $\Upsilon_0\Upsilon' = p, \qquad \Upsilon'\Upsilon = q$。

行星岁差对恒星的赤緯沒有影响，它只改变恒星的赤經。这可由圖 86 明显地看出: 圖中 $Q_0'Q_0$ 及 $k_0'k_0$ 是在历元 1900.0 时的赤道和黃道，$Q'Q$ 及 $k'k$ 是在历元 $1900+t$ 时的赤道和黃道，并作出在历元 $1900+t$ 时恒星 σ 的赤道坐标及在历元 1900.0 时恒星 σ 的黃道坐标; P 为在历元 $1900.0+t$ 时的天極，而 p_0 为在历元 1900.0 时的黃極。三角形 $p_0P\sigma$ 諸边之值与圖 84 所示的三角形 $pP\sigma$ 的諸边之値相同，因为 ε 与 ε' 間之差很小，甚至也可在第二近似式中將其舍去。这兩个三角形的主要差异仅在天極 P 上的角值，因为由圖 86 可以看出，

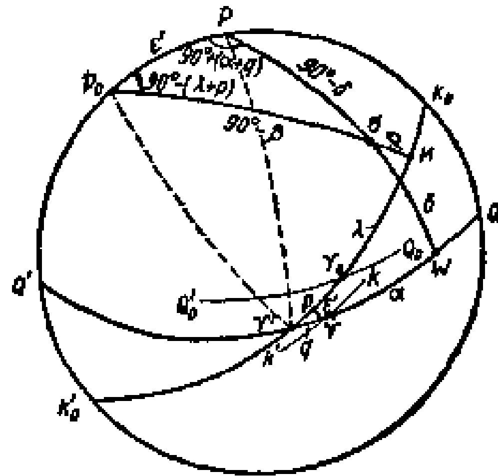


圖 86.

$$\angle p_0P\sigma = 90° + (\alpha + q).$$

因此，本节(a)式中的各式，对三角形 $p_0P\sigma$ 来說，只須稍加改变，就可改写为:

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon' + \cos\beta\sin\varepsilon'\sin(\lambda+p),$$

$$\cos\delta\sin(\alpha+q) = -\sin\beta\sin\varepsilon' + \cos\beta\cos\varepsilon'\sin(\lambda+p), \quad (a')$$

$$\cos\delta\cos(\alpha+q) = \cos\beta\cos(\lambda+p).$$

我們剛才說过: ε 与 ε' 間之差异在此可以忽略; 又 ε 的变化很小，在微分时可認其为一常数。所以微分可依

$$\alpha, \delta, p \text{ 和 } q$$

进行。

微分以后，再进行和前面一样的換算，即得:

$$d\delta=\cos(\alpha+q)\sin\varepsilon\,dp,$$

$$\cos\delta\cos(\alpha+q)(d\alpha+dq)=\sin\delta\sin(\alpha+q)\cos(\alpha+q)\sin\varepsilon\,dp+$$
$$+\cos\varepsilon\cos\delta\cos(\alpha+q)dp,$$

若不顧及微小量 q，則正弦和余弦符号后之 $(\alpha+q)$ 在此可以用 α 代替，于是得：

$$\frac{d\delta}{dt}=\sin\varepsilon\cos\alpha\frac{dp}{dt},$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{dq}{dt}+\cos\varepsilon\frac{dp}{dt}+\sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\alpha\frac{dp}{dt}.$$

若引入符号：　　$q_1=\frac{dq}{dt}$，　$p_1=\frac{dp}{dt}$；

則(222)式可改写为：

$$m=q_1+p_1\cos\varepsilon,\quad n=p_1\sin\varepsilon, \qquad (222')$$

而(223)和(224)兩式則不变。

若考虑到：行星岁差系与行星对地球的位置及其距离有关，而它們彼此間的关系又是不断地变化着，其次严格說来 ε 也是一个变数；則可得出一个正确的結論，m 和 n 是兩个随时間而变的量，不过这种变化是很緩慢的。在天体力学中，对 m 和 n 推导出了下面的計算式：

$$m=46''.085+0''.000279(T-1900),$$
$$n=20''.047-0''.000085(T-1900).$$

对于以整数年表示的时間間隔之岁差，通常与恒星的自行一并計算；一年以内的岁差則与章动、光行差和自行的影响一并計算。因此，关于实际計算岁差影响的問題，我們不得不在下面第七章內叙述。

§60. 章动·章动对恒星坐标的影响

若月球只受到地球方面来的引力，則月球的軌道为一橢圓，即

为一平面曲綫，而此軌道面对黃道面及赤道面始終保持固定不变的位置。但是，月球不仅受到地球的引力，而且还受到所有行星、首先是太陽的強大引力。太陽的引力要比地球的引力大一倍多。因此，月球在繞地球的运行中遭到許多相当大的攝动，这种攝动在月球論中通常叫做天秤动。在此情况下，对我們而言具有一种特殊意义的是月球軌道面 MNL（圖 87），在太陽引力的攝动影响下，不是不动的，而是緩緩地在黃道 $k'k$ 的軸 pp' 周圍轉动。这一运动与地球赤道面的岁差运动完全相似。但是，黃道面与月球軌道面的傾角 LOK 仍不变。

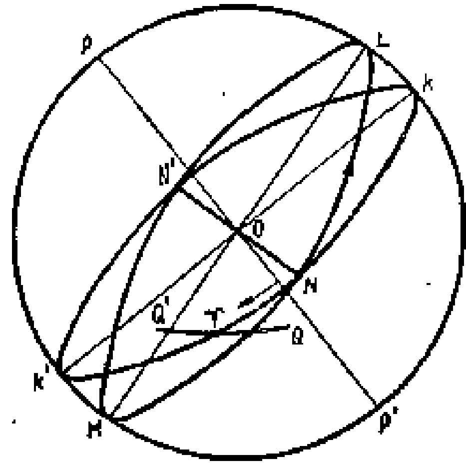


圖 87.

圖 87 所示为一天球，在其上作有黃道平面和月球軌道平面与天球的交綫（大圈）：$k'NkN'$ 为黃道，$MNLN'$ 为月球在天球上的視徑或視軌道。点 N 和 N' 就是月球視軌道与黃道面的兩个交点，它們叫做月球軌道交点或太陰交点。N 点叫做月球軌道的升交点，以符号☊表示；而 N' 点叫做降交点，以☋表示。月球由南天越过黃道轉入北天时，經过其軌道的升交点 N；反过来，自北天轉入南天时，于降交点 N' 处越过黃道。因此，黃道面和月球軌道面的交綫是連接太陰交点 N 及 N' 的一条直綫。所以圖 87 上的这条直綫 NN' 叫做交点綫。

若月球軌道面固定不动，則交点綫在黃道面上的位置亦可保持不变；这个位置，当 N 点的黃經即由春分点到升交点的黃道弧 ΥN 为已知时，它便可确定。升交点的黃經以 $\lambda_{☊}$ 表示，或者簡單地表示为☊。所以，我們可以写出：

$$☊=\lambda_{☊}=\smile\Upsilon N,$$

但月球軌道面在黃道軸周圍順时針方向轉动，并且如上所述，黃道面与月球軌道面間的夾角仍然不变。

黃道面对赤道面的傾角为 23°27′，而月球軌道面对黃道面的傾角为 5°9′。此时，月球軌道面与黃道面的交綫，即交点綫在空間不象上面所說的那样保持固定的位置，而是按順时鐘方向緩慢地轉动，每年轉动 19°20′.5，在 $18^2/_3$ 年內旋轉一整周。

由于交点綫的轉动，赤道面与月球軌道面間的夾角在 28°36′至 18°18′的范圍內变化着，即 23°27′±5°9′。这是兩个極限位置，此时太陰交点适与分点重合。圖 88 中，$Q'Q$ 为赤道面，$k'k$ 为黃道面，ML 和 $M'L'$ 是剛才所說的月球軌道面的兩个極限位置，这兩个位置是按半周期划分了交点綫的全部旋轉。从圖 88 中直接可以看出：

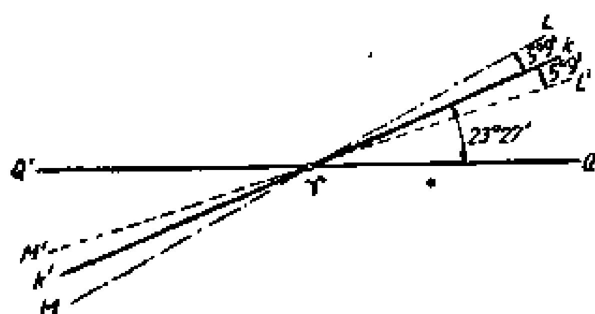


圖 88.

$$\angle Q\Upsilon L = 23°27' + 5°9' = 28°36',$$

$$\angle Q\Upsilon L' = 23°27' - 5°9' = 18°18'.$$

由于这些面的傾角的变动，力偶 AG—A_1G_1（見圖 79）的力矩 EF 也隨之变化，因而天軸、極和春分点的运动比上面所說的更为复杂。

在研究这种复杂的运动时，我們把它分为兩个較为簡單的运动。为此，我們引入平天極和眞天極、平春分点和眞春分点以及天軸的平位置和眞位置的这些概念。所謂天軸的眞位置，就是天軸在每一定瞬間所在的实际位置；眞天極和眞春分点是相应于天軸的这一实际位置的。天軸的平位置，其意所指是这样的一种位置，它是假定月球的影响具有固定性，即相应面的傾角始終保持同一的平均值时的位置。平天極和平春分点也是由这种天軸的平位置

所确定的。

依据上述的这些概念，对于天極的复杂运动可作如下的論述。平極順时針方向几乎均匀地循着中心为黃極、半徑为 23°27′ 的小圓运动着，旋轉一周为 26,000 年；眞極在平極附近振动，而在它的周圍画出極其复杂的曲綫；若不顧及它的微小振动，則可將此曲綫視为一小橢圓，其半軸等于 9″.2 和 6″.9，这一橢圓是在 18⅔ 年內所画出的（圖 89）。

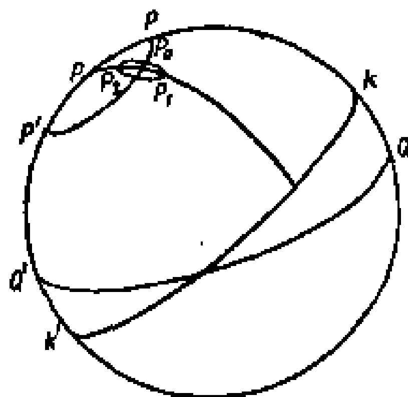


圖 89.

上述的平極运动叫做岁差。眞極对平極的振动叫做章动。在岁差与章动的綜合作用下，眞極的实际运动可用一波狀曲綫表示，此曲綫接近于岁差运动小圓 PP'（圖 90）。

天体的坐标，主要是赤道坐标，其关系于眞極、眞赤道和眞春分点的称为天体的眞坐标；关系于平極、平赤道和平春分点的称为平坐标。术語“平坐标”通常用“平位置”代替。



圖 90.

現在我們来进行章动計算公式的推导，即化眞坐标为平坐标或化平坐标为眞坐标的公式的推导。

产生岁差的原因是日月的引力对旋轉着的地球的赤道环的攝动，而章动是由于这种攝动作用的大小和方向在某种范圍內發生变化而产生的。所以，在圖 79 中表示轉动力偶 $AG—A_1G_1$ 的力矩的向量 EF 的大小和方向都在变化。这些变化的主要原因是月球軌道面和其交点綫的轉动，这已在前面頗为詳細地論述过了，这种轉动主要是改变向量 $\overrightarrow{EF}$ 的方向，部分地改变它的大小。这种現

象的周期如上所述为 18⅔ 年。其次，由于地球和月球运行的軌道都是橢圓的，太陽和月球距地球的距离是变化的，因而向量 $\overrightarrow{EF}$ 的大小是在变化的。在此其周期有成現为一年、半年、28 天、27 天和 14 天的一些振动。但地球軌道的近日点和月球軌道的近地点，在其軌道上的位置并不是固定不变的。連結近日点和远日点或相应的近地点和远地点的直綫称为拱綫；它也是变动的，換言之，地球軌道的長軸和月球軌道的長軸是在各該軌道面內轉动的，同时，二軌道的离心率是在不大的范圍內变化的。所有这些現象也会引起天軸、天極和春分点的微小的瞬时变动，其周期为一天至九天。通常把章动分为兩类：一类主要是取决于升交点☊的黃經、太陽的平黃經 $\lambda_{\odot}$ 以及太陽近地点的黃經，其周期自 18⅔ 年到 0.3 年；另一类主要是取决于月球的平黃經 $\lambda_{☾}$ 和月球近地点的黃經，其周期自 32 天至 9 天。前一类的項数約为 9 項，它們称为長周期章动項；后一类的項数約为 12 項，它們称为短周期章动項。攝动影响的周期越長，其所引起的偏差也越大。因此，周期为 18⅔ 年的各項，其値最大。若在第一次近似中只取这样的項，即依升交点的黃經而定的各項，那么眞極 P 繞平極 P_0 的路徑（圖 91）为一正橢圓，其半軸各为 a 和 b，同时正如我們所知道的那样：

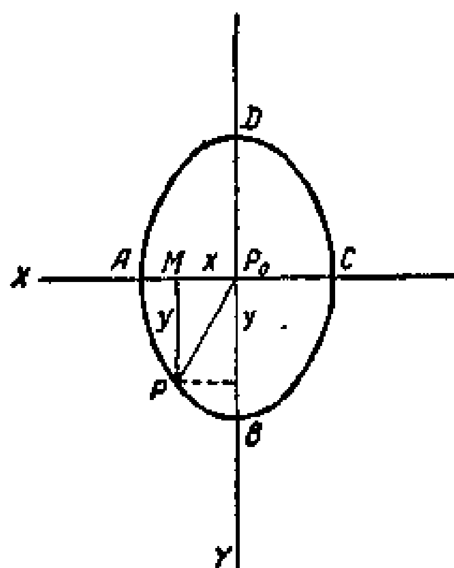


圖 91.

$$a=9''.2,\quad b=6''.9.$$

橢圓 $ABCD$ 的長軸 BD 在連接黃極 p 与平天極 P_0 的大圓方向上，即在对平極的至圈方向上。黃極 p 在圖 91 上未标示出，它的位置在圖內高于橢圓頂点 D。短軸 AC 处于在 P_0 点垂直于平

極至圈的大圓方向上，即在对平極的分圈上。(平)春分点在圖 91 上也未标出，它位于平極分圈上，在圖內 A 点的左边。

因章动橢圓極其微小，故可將整个圖 91 看作在 P_0 点切于天球的平面上的平面圖。在此切平面上作一笛卡兒直角坐标系，坐标原点为平天極 P_0。Y 軸在平極至圈方向上，X 軸在平極分圈方向上。Y 軸的方向自 P_0 点起在背向黃極反方向的視为正，即在圖 91 中自 P_0 向下的視为正；X 軸的方向自 P_0 点起指向平春分点的視为正，即在圖 91 中自坐标原点向左的視为正。按上述理由，平極分圈和平極至圈上的微小截段可視为与圖上的坐标軸重合。

在上述坐标系中，橢圓 $ABCD$ 的方程可写为：

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

式中 x 和 y 为真極 P 的流动坐标，a 和 b 为橢圓的軸，其值如上所示。

真極 P 对平極 P_0 的每一位移可分为在 Y 軸上的和 X 軸上的兩种位移。沿 Y 軸的位移，即沿極至圈的位移，它改变了真極 P 和黃極的距离。由于真極和黃極的距离等于赤道对黃道的真傾角，即

$$pP=\varepsilon,$$

故此位移就是黃道对赤道的傾角的变化。所以，真極对平極的位移叫做傾角章动，以符号 $\Delta\varepsilon$ 表示。

真極 P 沿 X 的位移，引起真極至圈对平極至圈的移动，和真極分圈对平極分圈的移动，因而引起真春分点对平春分点的移动。因为真春分点沿黃道对平春分点的移动，結果使所有天体的黃經發生变化，所以極至圈旋轉的角度在数值上等于真春分点沿黃道移动的弧称为黃經章动。黃經章动以 $\Delta\psi$ 表示。

为了以后的方便，章动橢圓 $ABCD$ 以参数方程表示，即：

$$x = b\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi;$$

式中 φ 为参数。椭圓上 A、B、C 和 D 四点的相应参数値 φ，显然是 $0°$、$90°$、$180°$ 和 $270°$。由 87 和 88 兩圖可以看出，当月球軌道升交点与春分点重合时，卽升交点的黃經 $\Omega = 0°$ 时，月球軌道平面与赤道平面間的夾角为最大。

相应于这一位置的黃道对赤道的傾角之値也为最大。因而，相应于縱坐标値 $y = P_0B$（見圖 91）的升交点黃經之値为零，卽

$$\Omega = 0°,$$

而升交点的參数 φ 之値为：

$$\varphi = 90°;$$

求得升交点在 A、B、C、D 四点时的黃經之値一般为：270、0、90 和 180°。故得一关系式：

$$\varphi = 90° + \Omega.$$

此时采用升交点 Ω 的黃經为參数，章动椭圓方程可改写为：

$$x = -b\sin\Omega,\quad y = +a\cos\Omega;$$

或用数値代替 a 和 b，則得：

$$x = -6''.9\sin\Omega.$$

$$y = +9''.2\cos\Omega.$$

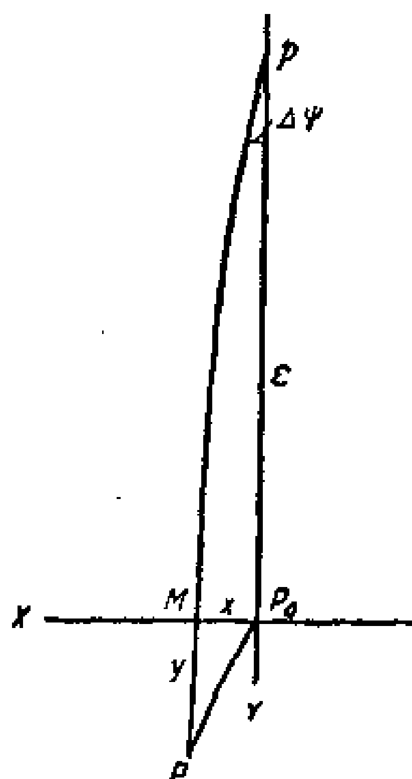


圖 92.

現在来建立 x 与 $\Delta\psi$ 及 y 与 $\Delta\varepsilon$ 間的关系。因为兩个大圈的極之間的球面距离在数値上等于此二大圈所夾的球面角，故此距离的增量等于球面角的增量。因而我們直接有：

$$y = \Delta\varepsilon. \qquad (a)$$

为了要將 x 和 $\Delta\psi$ 联系起来，察看圖 92。圖中，pP_0 为平極至圈，pP 为眞極至圈。因 x 和 y 較 $\frown pP_0 = \varepsilon$ 小，故可

視大圓弧段MP_0与MP分别为x和y，根据直角頂在P_0点的三角形MpP_0(圖92)，幷依納白尔-莫裴規則可写出：

$$\sin\varepsilon = \operatorname{ctg}\Delta\psi\ \operatorname{tg} x,$$

式中$\Delta\psi$为$\angle MpP_0$。

由此得 $$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\Delta\psi \sin\varepsilon,$$

或由于x和$\Delta\psi$微小，可写为：

$$x = \Delta\psi \sin\varepsilon, \tag{6}$$

由此得：
$$\Delta\psi = \frac{x}{\sin\varepsilon}.$$

代入x之値，幷稍加数字运算，則得近似公式：

$$\Delta\psi = -17''.2 \sin\Omega,$$

同样可求得$\Delta\varepsilon$之近似公式：

$$\Delta\varepsilon = +9''.2 \cos\Omega. \tag{225}$$

为了計算章动的影响，必須求得$\alpha-\alpha_0$及$\delta-\delta_0$的表达式，其中α和δ为恒星的真赤道坐标，α_0和δ_0为恒星的平赤道坐标。

为了推导$\delta-\delta_0$的表达式，茲察看圖93，其中P_0和P的含意与前同，而σ为某一恒星。作赤經圈$P\sigma$和$P_0\sigma$，因而得：

$$P\sigma = 90° - \delta,$$
$$P_0\sigma = 90° - \delta_0.$$

自真極P向赤經圈σP_0作球面垂綫PL；因x和y很小，PP_0和PL二弧也很小，故取PL为以σ为中心的小圓弧，即：

$$P\sigma = L\sigma.$$

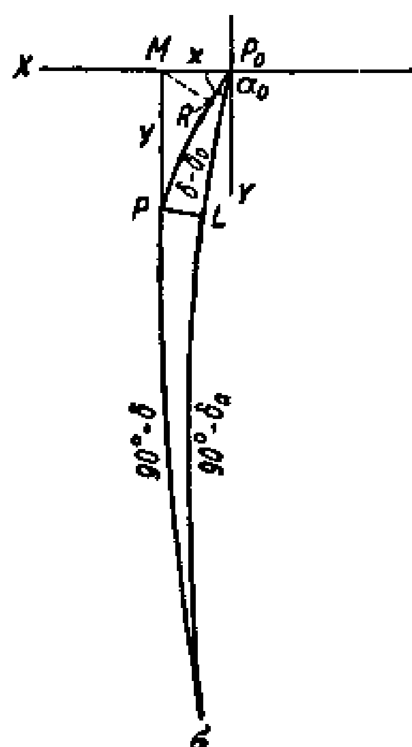


圖 93.

此时

$$P_0L=P_0\sigma-L\sigma=P_0\sigma-P\sigma=(90^\circ-\delta_0)-(90^\circ-\delta)=\delta-\delta_0.$$

今取 PL 为一以 P_0 为中心的小圓弧，則得：

$$PP_0=P_0L=\delta-\delta_0.$$

因 PP_0 弧很小，故將其看作是位于天球切平面上的直綫段，并視三角形 PMP_0 为一平面三角形，再自直角的頂点 M 向斜边 PP_0 引一垂綫 MR。近似地取 $\angle MP_0P$ 等于 α 或 α_0（因 $\angle PP_0\sigma$ 很小），則由圖中（圖 93）可以直接看出：

$$PP_0=MP_0\text{的射影}+PM\text{的射影},$$

或根据以上所述，則

$$\delta-\delta_0=x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

用 x 和 y 在(a)、(б)兩式中的表达式代入上式，則得：

$$\delta-\delta_0=\Delta\psi\sin\varepsilon\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0. \tag{в}$$

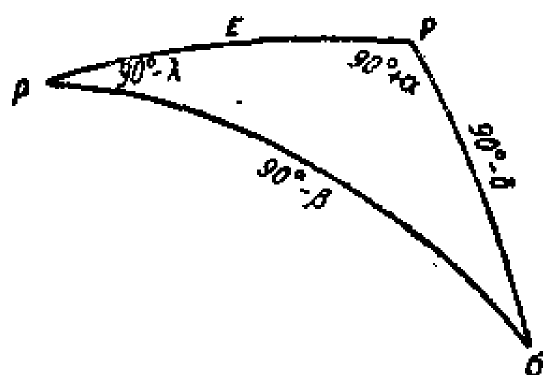


圖 94.

由于这个用几何方法推导 $(\alpha-\alpha_0)$ 的表达式較难理解，茲用解析法推导之。选用三角形 $pP\sigma$（圖 94），其中 p 为黃極，P 为眞天極，σ 为某一恒星。

我們已經知道（參閱 § 28），此三角形的边及角具有如下之数值：

$$P\sigma=90^\circ-\delta,\ p\sigma=90^\circ-\beta,\ \ pP=\varepsilon;$$

$$\angle pP\sigma=90^\circ+\alpha,\ \ \angle Pp\sigma=90^\circ-\lambda.$$

我們又知道，由于章动的緣故，所有恒星的黃經都在变化，并且变化为同一数值 $\Delta\psi''$。此外，赤道对黃道的傾角 ε 的变化値为 $\Delta\varepsilon$。但所有恒星的黃緯却無变化。赤道坐标 α 和 δ，显然是各因章动而变，換句話說，它們因 λ 和 ε 的变化而变化。这种变化可

写为:

$$\alpha = f_1(\lambda, \varepsilon), \quad \delta = f_2(\lambda, \varepsilon).$$

因 α、δ、λ 和 ε 的章动变化很小,故 $\alpha-\alpha_0$ 和 $\delta-\delta_0$ 可展为台劳級数,并限取其含一次偏导数之項。因此可写为:

$$\alpha-\alpha_0 = \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\Delta\psi + \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon,$$

$$\delta-\delta_0 = \frac{\partial\delta}{\partial\lambda}\Delta\psi + \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon. \qquad (\text{г})$$

欲求所需要的偏导数:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}, \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}, \frac{\delta\alpha}{\partial\lambda}, \frac{\alpha\delta}{\partial\varepsilon},$$

則首先应就三角形 $pP\sigma$(圖 94)写出所謂的天文公式組,即:

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda,$$

$$-\cos\delta\sin\alpha = \sin\beta\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda, \qquad (\text{д})$$

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda.$$

現在就 δ 及 ε, 微分(д)式的首式得:

$$\cos\delta\, d\delta = (-\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda)\, d\varepsilon,$$

或按(д)式的第二式得:

$$\cos\delta\, d\delta = \cos\delta\sin\alpha\, d\varepsilon,$$

或簡化为 $$d\delta = \sin\alpha\, d\varepsilon,$$

由此得 $$\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \sin\alpha. \qquad (\text{е})$$

再就 δ 及 λ, 微分(д)的首式:

$$\cos\delta\, d\delta = \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda\, d\lambda,$$

或再按(д)式的第三式得:

$$\cos\delta\, d\delta = \sin\varepsilon\cos\delta\cos\alpha\, d\lambda,$$

或簡化为 $$d\delta = \sin\varepsilon\cos\alpha\, d\lambda,$$

由此得 $$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \sin\varepsilon\cos\alpha. \qquad (\text{ж})$$

根据(e)，(ж)兩式，將导数 $\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}$ 和 $\frac{\partial\delta}{\partial\lambda}$ 之値代入(г)式的第二式得:

$$\delta-\delta_0=\sin\varepsilon\cos\alpha\Delta\psi+\sin\alpha\Delta\varepsilon.$$

这样，我們按另一种方法重新求得了(в)式。

今就 α、δ 和 ε，微分(д)式的第二式:

$$\sin\delta\sin\alpha\,d\delta-\cos\delta\cos\alpha\,d\alpha=$$
$$=(\sin\beta\cos\varepsilon+\cos\varepsilon\sin\varepsilon\sin\lambda)d\varepsilon,$$

再利用(д)式的首式得:

$$\sin\delta\sin\alpha\,d\delta-\cos\delta\cos\alpha\,d\alpha=\sin\delta\,d\varepsilon,$$

由此得
$$\cos\delta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}=\sin\delta\sin\alpha\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}-\sin\delta,$$

再利用(e)式得:

$$\cos\delta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}=\sin\delta\sin^2\alpha-\sin\delta,$$

或
$$\cos\delta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}=\sin\delta\,(\sin^2\alpha-1),$$

或
$$\cos\delta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}=-\sin\delta\cos^2\alpha;$$

由此得
$$\frac{\partial\alpha}{d\varepsilon}=-\mathrm{tg}\,\delta\cos\alpha.\tag{з}$$

最后就 α、δ 和 λ，再微分(д)式的第二式:

$$\sin\delta\sin\alpha\,d\delta-\cos\delta\cos\alpha\,d\alpha=-\cos\beta\cos\varepsilon\cos\lambda\,d\lambda,$$

由此得

$$\cos\delta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=\cos\beta\cos\varepsilon\cos\lambda+\sin\delta\sin\alpha\frac{\partial\delta}{\partial\lambda}.$$

利用(ж)式及(д)式的末式，可將其改写为:

$$\cos\delta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=\cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\alpha\cos\alpha\sin\varepsilon,$$

由此得
$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=\cos\varepsilon+\mathrm{tg}\,\delta\sin\alpha\sin\varepsilon.\tag{и}$$

將(з)和(и)式代入(г)式的第一式得:

$$\alpha-\alpha_0=(\cos\varepsilon+\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon)\Delta\psi-\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\,\Delta\varepsilon. \qquad (к)$$

于是,我們求得了真赤經与平赤經之差的表达式(к)。此式由三項組成。第一項 $\cos\varepsilon\Delta\psi$ 与恒星坐标無关，故对所有的恒星来說都有相同的数値。这是真春分点在黄道上的章动位移向赤道的射影。$\Delta\psi\cos\varepsilon$ 叫做赤經章动。

若近似地計算章动影响，則 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 之値可按近似公式(225)計算。若要精密計算，則推导 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 的公式时，还必須顧及其余諸章动項的影响。同时,为了实际計算方便起見,將長周期章动項和短周期章动項的影响分别計算。取黄經章动为:

$$\Delta\psi+d\psi=(\Delta\psi),$$

取傾角章动为:

$$\Delta\varepsilon+d\varepsilon=(\Delta\varepsilon), \qquad (л)$$

式中 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 分別为長周期項之和，而 $d\psi$ 和 $d\varepsilon$ 分别为短周期項之和。天体力学中,对于这些量推导有很精密的公式,此等公式可簡写为:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\psi&=-17''.234\sin\Omega+\text{其余的各長周期項},\\ \Delta\varepsilon&=+9''.210\cos\Omega+\text{其余的各長周期項};\end{aligned}\right\}\qquad(226)$$

$$\left.\begin{aligned}d\psi&=-0''.081\sin 2\lambda☾+\text{其余的各短周期項},\\ d\varepsilon&=+0''.088\cos 2\lambda☾+\text{其余的各短周期項}。\end{aligned}\right\}\qquad(227)$$

在 $\Delta\varepsilon$ 的公式中，$\cos\Omega$ 的系数称为章动常数或章动系数，以字母 N 表示。在精密計算时，必須顧及到此量的緩慢变化，它在100年内減小 $0''.001$。因此我們可写为:

$$N=9''.210-0''.00001(t-1900),$$

式中 t 以年表示。

$\sin\Omega$ 的系数同样等于:

$$-17''.234-0''.00017(t-1900),$$

式中 t 同样以年表示。

顧及到(Д)式，將(В)、(Е)二式改写如下：

$$
\begin{aligned}
\alpha-\alpha_0&=(\Delta\psi+d\psi)(\cos\varepsilon+\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon)-\\
&\quad-(\Delta\varepsilon+d\varepsilon)\operatorname{tg}\delta\sin\alpha,\\
\delta-\delta_0&=(\Delta\psi+d\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha+(\Delta\varepsilon+d\varepsilon)\sin\alpha,
\end{aligned}
\tag{228}
$$

或

$$
\begin{aligned}
\alpha-\alpha_0&=(\Delta\psi)(\cos\varepsilon+\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon)-(\Delta\varepsilon)\operatorname{tg}\delta\sin\alpha,\\
\delta-\delta_0&=(\Delta\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha.
\end{aligned}
\tag{228'}
$$

在第二章§14中，我們已經确定了：計算地球对春分点的轉动，可以求得时間的量度單位恒星日；而恒星时在数値上等于以时單位表示的春分点的时角。但現在我們懂得，春分点必須区分为眞春分点和平春分点。

这就是說：計算地球对眞春分点的轉动，我們可以求得**眞恒星日**；而用此單位量度的时間，称为**眞恒星时**。依上所述，我們可以把**眞恒星日**定义为**眞春分点在一定地点子午圈上連續兩次上中天的时間間隔**。

計算地球对平春分点的轉动，則可求得**平恒星日**及**平恒星时**。因而我們把**平春分点在一定地点的子午圈上連續兩次上中天的时間間隔叫做平恒星日**。

由于岁差的緣故，平春分点始終在一个方向对恒星运动着，其速度只在几百年內才略有一点变化。所以平春分点的时角是与时間成比例地、均匀地变化的，这样，我們在§14中所述的关于平春分点和平恒星时的規定仍然完全有效。其中特別正确的結論是平恒星时在数値上等于平春分点的时角的結論。

由于赤經章动，眞春分点以变速循赤道不均匀地运动着。以时秒表示的眞恒星时与平恒星时之差，在数値上始終等于：

$$\frac{1}{15}(\Delta\psi+d\psi)\cos\varepsilon.$$

因此，赤經章动在化眞恒星时为平恒星时所起的作用，完全类似于

时差在化真太陽时为平太陽时及其反算中所起的作用。在此只是数値小了許多倍而已。真恒星日与平恒星日相比較，其差最大可达± $0^{秒}.004$，赤經長周期章动之値$\left(\frac{1}{15}\Delta\psi\cos\varepsilon\right)$达± $1^{秒}.2$，而短周期章动之値$\left(\frac{1}{15}d\psi\cos\varepsilon\right)$达± $0^{秒}.02$。

若对平春分点的位置只加上長周期章动$\frac{1}{15}\Delta\psi\cos\varepsilon$，而不計及短周期章动$\frac{1}{15}d\psi\cos\varepsilon$，則得近似真春分点或称它为假春分点；故計算地球对此假春分点的轉动，即得假恒星日和假恒星时。假恒星日与真恒星日相差無几，然而，假恒星时与真恒星时之差达$\pm0^{秒}.02$，这由上述可以看出，由于在野外实用天文学中恒星时通常計算至$0^{秒}.01$，所以往往把这种差异加以忽略。但在授时站和天文台工作中，以及測定一等天文点的經度时，它們的恒星时是計算至$0^{秒}.001$，因而很明显，在此我們不能忽視短周期章动的影响，并且还必須加以計算。

章动是达选斯·布拉得雷于1743年至1745年間發現的。普尔柯沃天文学家 X.A.Ф.彼捷尔斯(1806—1880)在測定章动常数方面进行了巨大的、卓越的工作；这些工作在其"章动常数値"論文集中有所叙述。

§61. 恒星自行

坐标变化的最后一个原因，就是一切恒星在空間对地球和太陽的运动速度很大，平均每秒約几十公里左右，而且方向又各不相同。这种坐标变化原因引起了科学界的莫大兴趣。但因为这些天体离我們很远，它們的相对运动是我們肉眼所不能看出来的，只有長期反复地作最精密的測量和借光譜分析的帮助才可能發現。

假設圖95中的S点表示包括地球在内的太陽系，σ为任一恒星。向量σE表示恒星σ在空間对太陽系的运动。作一直綫$S\sigma$，

它是由地球看恒星 σ 的方向，即通常所說的"視綫"方向。假想过恒星 σ 作一平面垂直于視綫 $S\sigma$。显然,这就是天球的切平面，此天球系以 S 为中心,距离 $S\sigma$ 为半徑所画出的。直綫 AB 是該切平面与圖平面的交綫，即与通过 S、σ 兩点及向量 $\overrightarrow{\sigma E}$ 的平面的交綫。因而直綫 AB 与視綫 $S\sigma$ 垂直。

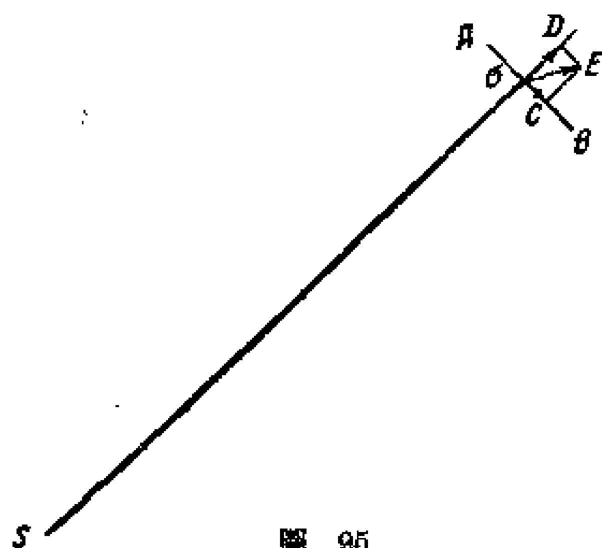


圖 95.

兹將恒星自行向量 $\overrightarrow{\sigma E}$ 分作兩个分向量：在視綫上的向量 $\overrightarrow{\sigma D}$ 和在垂直于視綫的 AB 方向上的向量 $\overrightarrow{\sigma C}$。

向量 $\overrightarrow{\sigma D}$ 称为恒星在視綫上的运动或叫視向运动。恒星在視綫上的运动用分光鏡按多普勒-別洛保尔斯基原理确定。当光源(例如恒星)远离或接近时,可在光譜中看到暗綫或亮綫的位移:远离时譜綫移向紅端,接近則移向紫端。測出此种位移的量,就可确定光源在視綫方向上向着观測者或离开观測者的运动速度，这种速度以公里/秒表示。

向量 $\overrightarrow{\sigma C}$ 是恒星在空間运动的分量，它与視綫垂直。由于在 σ 点近圍的天球微小部分,可以看成和天球在 σ 点的切平面重合，因此可以說，向量 $\overrightarrow{\sigma C}$ 是恒星在空間的运动对天球的投影。这种恒星在空間的相对运动对天球的投影叫做恒星自行，其值以度秒表示。絕大多数的恒星在一年內的自行小于 $0''.1$,但也有少数离我們較近的恒星在一年內的自行可达数秒(最大为 $10''$)。

要确定恒星的自行,至少需要有兩对恒星坐标値,这兩对坐标値系由相隔几十年或几百年的兩次观測获得的。这些坐标应加上在第五章所述的那些变化之改正数，然后化至同一坐标系內的位

置，即通常所說的归算到同一分点，这也就是說应該顧及到岁差和章动。若观測沒有誤差，且恒星在天球上也沒有位移，則由不同历元的观測結果归算而得的恒星坐标应完全相同的。但事实上这是不可能的。这表示恒星在各个历元的位置坐标，虽然归算到同一分点后，但仍有某些差异。这种差异是恒星在兩个观測历元中間的自行和不可避免的观測誤差影响之总和。若有了在不同历元对恒星进行多次測定的坐标値，則其自行可用圖解法或最小二乘法来确定。对于确定自行的精度說来，观測历元相隔越長，則所求得的自行就越精确，这是一方面；但另一方面，我們还必須顧及到，若間隔越長，則老的观測精度与現代的比較起来又要低得多。

現在暂时假設恒星自行是沿大圓弧按等速度进行的，可是我們沒有根据来否定以下的事实，即以后經过長时間更精确的观測可能發現自行的途徑是弯曲的、且速度是变化着的。

为了計算方便起見，將恒星自行分为沿赤經圈 σL（圖 96）的自行和沿周日平行圈 σM 的自行。圖 96 中，$ABDE$ 系表示 σ 点周圍的一小部分天球表面，向量 $\overrightarrow{\sigma C}$ 与圖 95 上的一样是恒星 σ 的自行，GH 是該星的赤經圈，KF 是周日平行圈。

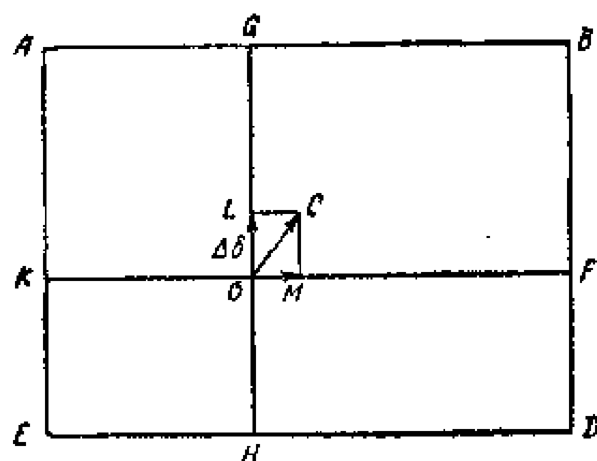


圖 96.

茲研究恒星因其自行而产生的赤道坐标 α 和 δ 的变化。我們假定在圖 96 中：天極 P 位于赤經圈 GH 的延長綫的上方某处；赤道則相反，它在周日平行圈 ED 的下方某处与赤經圈相交；而春分点則位于赤經圈 GH 左方某处的赤道上。显然，此时向量 $\overrightarrow{\sigma L}$ 和

$\overrightarrow{\sigma M}$ 的方向是指着正方向的，即分别指着赤緯与赤經的增加方向的。

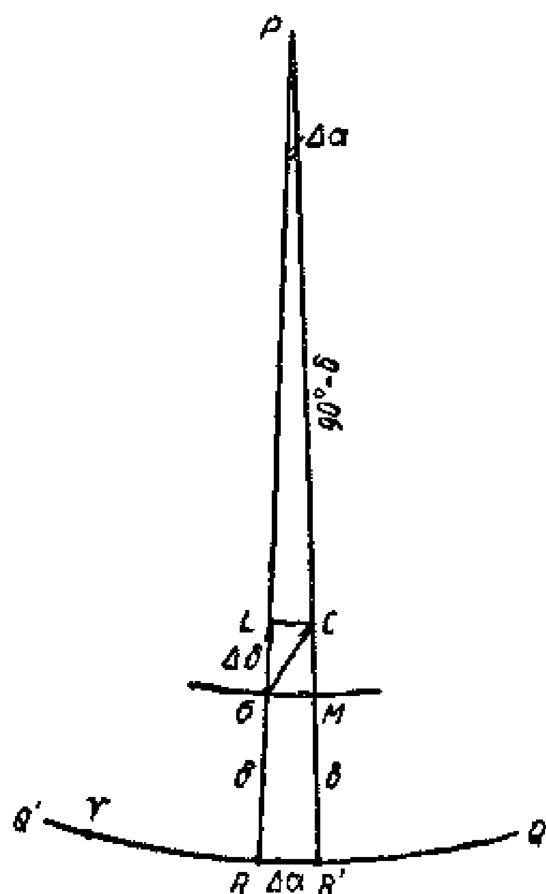


圖 97.

因此，由圖 96 可以看出，向量 $\overrightarrow{\sigma L}$ 即为赤緯的增量$\Delta\delta$，它是恒星在某一時間間隔內自行的結果。

欲求赤經的变量 $\Delta\alpha$，察看圖 97，圖中向量 $\overrightarrow{\sigma C}$、$\overrightarrow{\sigma L}$ 和$\overrightarrow{\sigma M}$ 之含意与前面相同，P 为天極，$Q'Q$ 为赤道，♈为春分点。作恒星的赤經圈 $P\sigma R$ 和 M 点的赤經圈 PMR'，并研究直角在 σ 点的直角三角形 $P\sigma M$。其中，因小圓弧 σM 很小，故可視其为通过 σ 和M点的大圓弧。显然(圖 97)，赤經的增量等于赤道弧 RR' 或頂点在天極 P 的球面角 σPM；此可写为：$\Delta\alpha = \smile RR'$ = 球面角 RPR' = 球面角 σPM。三角形 σPM 的斜边即 PM可由下式求出：

$$PM = PR' - R'M = 90^\circ - \delta.$$

由三角形 σPM 得：

$$\sin \sigma M = \sin \Delta\alpha \cos \delta,$$

或因 σM 及 $\Delta\alpha$ 很小，故

$$\sigma M = \Delta\alpha \cos \delta, \tag{229}$$

由此得：

$$\Delta\alpha = \frac{\sigma M}{\cos \delta}. \tag{230}$$

因恒星自行所引起的坐标变量：$\Delta\alpha$——称为**赤經自行**；$\Delta\delta$——称为**赤緯自行**。这些运动的速度若是关系于以年为單位的，則分

別叫做赤經的周年自行和赤緯的周年自行。

若將化至同一分点的恒星的坐标代以符号：在历元 T_0 时的坐标为 α_0 和 δ_0，在历元 T 时的坐标为 α 和 δ，則显然有：

$$\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha,\quad \delta=\delta_0+\Delta\delta, \tag{231}$$

式中 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 各为在历元 T_0 至 T 間的整个时間間隔內 α 和 δ 的增量。因而，要計算自行，首先必須分別算出赤緯的自行 $\Delta\delta$ 和赤經的自行 $\Delta\alpha$。若以 μ_δ 和 μ_α 分別表示赤緯和赤經的周年自行，則根据上述的自行的均勻性这一假定，卽可求得用以計算在 T_0 至 T 这一时間間隔內的 $\Delta\alpha$ 及 $\Delta\delta$ 的簡單公式：

$$\Delta\delta=(T-T_0)\mu_\delta;\ \Delta\alpha=(T-T_0)\mu_\alpha, \tag{232}$$

式中 $(T-T_0)$ 以年或年的小数表示。(231) 与 (232) 二式卽为解算本节所提出的恒星自行这一問題的公式。

測定和研究恒星自行，以及确定自行的一定規律性，乃是整个恒星天文学特別是天体測量学中最重要的科学問題之一。

同时必須指出：在岁差的影响下，沿大圓弧 σC（圖 96）的自行的数値是不变的。但分量 σL 和 σM 随着时間的推移而略有变化。这是 $\angle C\sigma M$ 与 $\angle C\sigma L$ 兩角变动的結果，因为由于岁差的緣故，赤經圈、赤道和周日平行圈慢慢地随着平極的位移而变动。

許多恒星的自行，是在 1718 年第一次为安达豪特·哈雷(1656—1742)所發現的。

§62. 地極的移动

观測証明，地面各点的地理坐标，卽各点的地理緯度 φ 与地理經度 λ 同样是随时間而变的。十九世紀中叶，普尔柯沃天文学家 M. 紐萊，第一次从分析恒星赤緯观測結果中發現了緯度的变化；他所依据的赤緯观測結果的观測是自普尔柯沃天文台成立起就开始的，所用的仪器是該台的大型垂直大圈仪，參加观測的除紐萊本

人之外，尚有普尔柯沃天文学家 B. 斯特鲁維、X. 彼捷尔斯和 Г. 依杰里松。以后又陆續發現其他天文台的緯度也在不大的范圍內發生变化，有时增大，有时減小。

为了弄清这种現象的产生原因，国际弧度測量委員会于 1891—1892 年，組織了專門的勘察队去太平洋夏威夷群島的火奴魯魯(即檀香山)进行观測，該島的經度与中歐各天文台的經度約相差 180°。欧洲的各天文台也在相同时間內进行了观测。由观測結果發現：当这些天文台的緯度增大时，火奴魯魯的緯度就減小，并且增加和減少的数值相同，反之亦然。这一事实証明了，緯度变化的原因是地極在地面上的移动。实际上，若地極向某一点离开，則該点的緯度必然減小；若地極向 A 点靠近，則 A 点的緯度必定增大。但若地極在地面上的移动是向欧洲大陆的 A 点靠近，則它就对經度与 A 点相距 180° 的太平洋中的某点 B 离开；反之，若地極对 A 点离开，則它就向 B 点靠近。

参加对于緯度变化这种复杂现象及其与極移关系之研究的，有苏联的普尔柯沃、莫斯科、卡贊、波尔塔瓦等等天文台，其次还有格林尼治、柏林、华盛頓等等天文台。1893 年，普尔柯沃天文学家 С. К. 柯斯金斯基首先推导出了緯度变化与極移間的关系式。这一公式的推导將于下面說明。除上述所提到的学者以外，尚有其他学者也参加了这一問題的研究工作，如莫斯科大学的教授 П. К. 斯杰尔墨尔克、卡贊大学的教授 М. А. 克拉契夫、列宁格勒大学的教授 А. А. 依凡諾夫、軍事測量家 Д. Д. 蓋乔諾夫、烏克蘭科学院院士 А. Я. 奥尔洛夫等人。

为了不間断地进行观测和研究地極的移动，于 1899 年成立了国际緯度局，該局直到現在仍在工作。在苏联境內，有一个国际緯度局的緯度站，它和其余的緯度站一起都位于同一緯圈上(39°8′)。

起初，这个緯度站在察尔剑(中亞細亞)，它是最先开始定期观測緯度的緯度站之一。此緯度站于 1919 年曾被毁坏，这时已是苏維埃时代。后于 1928 年，又在基塔布(烏兹别克苏維埃社会主义共和国)重建了一个新的国际緯度站，此站至今仍进行着有成效的观測工作。这两个緯度站曾經都卓越地参加过国际的極移研究工作，而基塔布緯度站在現在的国际緯度局的观測及研究活动中，仍有着巨大的意义。

远在十八世紀末，苏联彼得堡科学院院士 Л. 欧拉在理論上就已預言了地極的移动。

欧拉在其偉大的著作"剛体的轉动論"(1790 出版)中，研究了剛体旋轉的微分方程，这些微分方程是他在 1765 年导出的，其形式如下：

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=L_x,$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=L_y,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=L_z,$$

式中 p, q, r 为旋轉角速度 ω 的分量，A, B, C 为旋轉偉的主惯量，L_x, L_y, L_z 为三外力主力矩之投影。

对于看作是一个旋轉椭圓体的地球来說：

$$A=B;\qquad L_z=0,$$

而欧拉方程可采取如下的形式：

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr=L_x,$$

$$A\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=L_y,$$

$$C\frac{dr}{dt}=0.$$

在研究上述的岁差与章动現象时，需要利用这些方程的积分。

为了根据这些惯性方程来研究地球的轉动，假設这些方程中的

$$L_x=0; \qquad L_y=0,$$

則方程可写成下列形式:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr=0,$$

$$A\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0,$$

$$C\frac{dr}{dt}=0.$$

在將这些地球轉动的微分方程进行积分时，正如欧拉所指出的那样，必須采用兩个任意的常数，来确定地球轉軸对于地球体的惯量主軸的位置。若在某一起始瞬間此二軸不相重合，則在往后的方程中必須有自由摆动，即轉軸繞惯量主軸的自由章动；根据欧拉的說法，这些摆动的周期为 303.3 平太陽日(欧拉周期)。必須注意，欧拉在研究这一問題时是从这样的假設出發的，即假設地球是一个旋轉的剛性均匀橢圓体。

因为剛体的任何运动都可归結为兩种基本的运动——平移与轉动，而这兩种运动多半可以單独地研究而互不关連，所以在研究轉动时，我們可以假定此剛体中有一靜止点，为方便計，取这点为剛体的質量中心。在这种情况下，我們可以視剛体的运动为一系列的、連續的無限小的轉动，其中每一轉动都是圍繞通过該物体的靜止点的軸綫进行的。剛体的这种無限小轉动所繞的轉动軸，称为剛体的瞬时轉动軸。

瞬时轉动軸在空間的几何位置，对一固定坐标系構成一圓錐面，此圓錐面叫做靜圓錐面。此外，在剛体运动时，瞬时轉动軸改变其在該物体內的位置。由一束瞬时轉动軸对与剛体相关連的动坐标系所構成的圓錐面，叫做动圓錐面。这兩种圓錐面的公共頂

点在剛体的靜止点上。在每一瞬間，瞬时轉动軸是靜圓錐面和动圓錐面的公共母綫。当物体轉动时，动圓錐面沿着靜圓錐面作不滑动的滾动。

借助于上述的动力学观念，对于地球的轉动可給予如下的說明。

地球的瞬时轉动軸是不斷地移动的：在空間是沿着靜圓錐面移动，在地球体內是沿着动圓錐面移动，而动圓錐面則沿着靜圓錐面作不滑动的滾动。这种旋轉的靜圓錐面，是一个复杂的圓錐面，它的几何軸为黃道軸，它的形狀近似于岁差的正圓錐面，口徑約为47°，它为地球瞬时轉动軸在約为26,000年的时間間隔內所画成的。动圓錐面是一个"自由章动"圓錐面，其口徑約为0″.3，它的几何軸与地球慣量主軸重合。由于瞬时轉动軸沿动圓錐面的移动是因慣性而产生的，并非因某些外力或內力的直接作用所致，因此这种移动叫做自由章动，它与由于地球質量的再分配或类似的原因所引起的强制章动相反。

因为地軸在地球体內不能保持固定的位置，故如上所述，只能論及地球的瞬时轉动軸及其平位置。地球的瞬时極（南極、北極）与瞬时轉动軸相应；而平極与平軸相应。至于"平極"这一术語的意义，下面將詳細地加以說明。

因为地球的瞬时軸繞平軸画出一个圓錐面，所以地球的瞬时極（如北極）也繞平極画出一条曲綫。这兒，瞬时極离开平極都在0″.3以下，因此二極間的距离平均約为0″.15。这样，瞬时極沿地面的移动，始終在以平極为中心、边長为20公尺的正方形范圍以內。

所以，我們可以用以下的方法来研究瞬时極的运动。首先，在地球表面与平軸的交点上，即在平極上作出地球表面的切平面。取平極（下面用P_0来表示平極）作为笛卡兒直角坐标系的原点。

因为極的位移与地球的大小相比是很小的，故將在平極 P_0 周圍这一区域的切平面看作与地面相重合，在此区域內的直角坐标軸則視为与地球的大圓即与子午圈相重合。X 軸在格林尼治子午綫方向上，由平極指向格林尼治方向的为正；Y 軸的方向由格林尼治子午綫向西即由 X 軸按順时針計算为 90° 的为正向（圖 98）。圖 98 中的 P_0 为平極，同时又是坐标系的原点；P 是瞬时極；由圖看出，P 的位置可用直角坐标 x 和 y 或極坐标——即向徑 ρ 与位置角 ϑ——求得，ϑ 由極軸 P_0X 順时針方向計算。就最后的計算公式和明显地表示極的运动而言，用直角坐标是較为方便的。然而，在推导这些公式时，我們还必須要有極坐标。

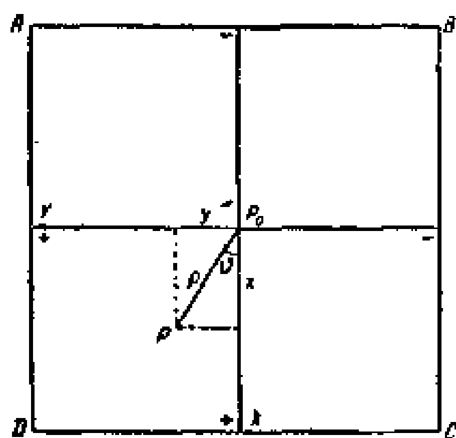


圖 98.

我們知道，直角坐标和極坐标間的关系式为：

$$x=\rho\cos\vartheta;\qquad y=\rho\sin\vartheta,\tag{a}$$

这种关系式亦可由圖 28 直接得出。

緯度的变化与地極坐标 x 和 y 間的关系为柯斯金斯基公式（参閱(233)式）所建立。若已知某些地面点（兩个以上）的緯度在一系列个别瞬間的变化，則可算出在这些瞬間地極的坐标 x 和 y，据此可作出地極在某一时間間隔內移动的曲綫。許多学者根据自十九世紀末到目前为止所积累起来的許多观測資料，进行了多次的这样的計算。这种研究的結果确定，瞬时極的运动所描画出的是一条复杂的螺旋曲綫。螺旋綫有时是向內卷的，此时，瞬时極逐漸接近平極，如圖 99 所表示的是地極在 1910.0 年至 1913.8 年間的运动曲綫；螺旋綫有时則相反，是向外卷的，而瞬时極逐漸离开平極，如圖 100 所表示的是地極在 1943.0 年至 1946.0 年間的运动曲

綫。地極坐标通常是十分之一年計算一次，圖上(見圖 99)各点所表示的就是每十分之一年的地極位置。因此，根据这些研究可以确定，地極擺动的振幅是在 0″.04 至 0″.25 的大范圍内变化着。从观測中并未發現欧拉的理論周期。从观測的分析中直接得出的平均周期为 431 天，此周期叫做陈德勒周期，这是以首次發現这种緯度变动周期的 C. 陈德勒命名的。这一周期与理論周期的差別在后被証实：它是由于地球并不是一个絕对剛体而是有着象鋼所具有的那种彈性的剛体的緣故；此外，还因为地球有被水(部分地)与大气所包圍的緣故。

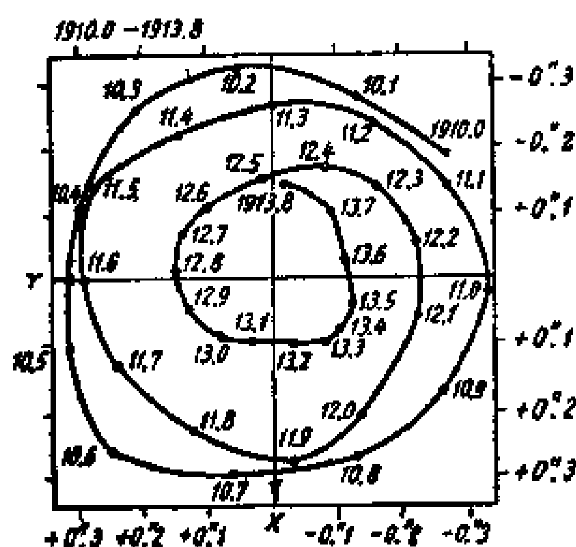


圖 99.

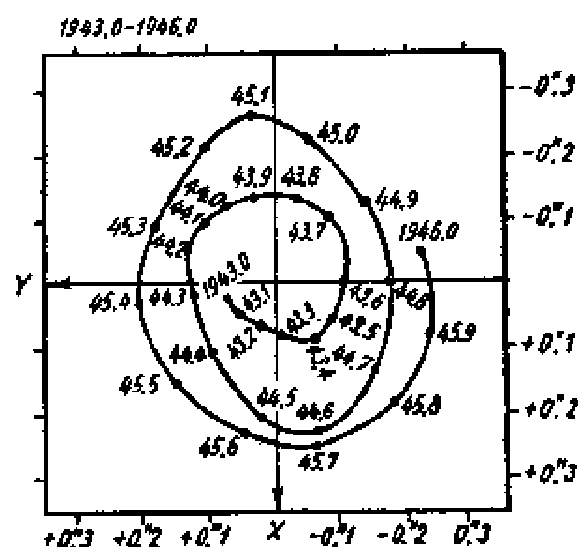


圖 100.

同样必須指出，从理論上来說，擺动的周期和振幅都应当是不变的，但事实上兩者都在一定的范圍内变化着。其原因是由于在地面附近的質量的移动而使現象的規律性經常被破坏；这种質量的移动，是由于形成高溫度和低溫度及高气压和低气压而發生海流与气流所引起的，其次是由于那些帶有季节性的周期約为一年的气象現象(例如降雪周期，生物区的植物生長期)所引起的。所以，在地極的擺动中，尙出現有重复性的整年周期及微小的半年周期。

兹推导地極的坐标与緯度变化的关系式。

我們同柯斯金斯基一样，認为平地極是这样的地面点，它是由地面許多点的緯度的平均值所决定的，这些点的緯度是經过長时期的一系列的观测所求得的。設在圖 101 中 P_0 点为地面上的平地極，P 是由向徑 ρ 和位置角 ϑ 所确定的瞬时地極的位置；最后設 A 为企圖求出其緯度变化的某地面点。A 点的平地理坐标：φ_0 为緯度，λ_0 为經度。λ_0 由格林尼治向西計算。

在此应特别指出，在研究極移問題时，系采用地理經度的第一种計算法（参閱 § 11，第 47 頁），即經度由格林尼治向西計算为正，向东計算为負。这是与前面（第 292 頁）选擇 Y 軸的正向直接相关的。

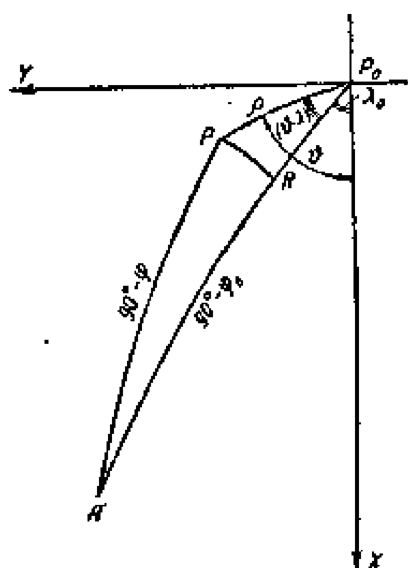


圖 101.

因此，在閱讀本节时，讀者必須注意这一点，幷牢牢記住：本节所采用的經度計算法与本書其余各节中所采用的不同。

通过平極与瞬时極，各作 A 点的平子午綫与瞬时子午綫，即大圈 P_0A 与 PA。由圖 101 看出：

$$P_0A = 90^\circ - \varphi_0; \qquad PA = 90^\circ - \varphi,$$

式中 φ 为 A 点的瞬时緯度。自瞬时極 P 引一球面垂綫 PR 至子午綫 P_0A。因为 PP_0 很微小，所以 PR 也很小，于是球面三角形 PP_0R 可視为平面直角三角形而解算之。依圖 101，此三角形中：

$$PP_0 = \rho,$$

$$\angle PP_0R = \angle PP_0X - \angle RP_0X = \vartheta - \lambda_0,$$

$$P_0R = P_0A - RA = (90^\circ - \varphi_0) - (90^\circ - \varphi) = \varphi - \varphi_0,$$

幷由于 PR 微小而設置：

$$RA=PA=90^\circ-\varphi.$$

自三角形 PP_0R 得:

$$P_0R=PP_0\cos PP_0R,$$

或

$$\varphi-\varphi_0=\rho\cos(\vartheta-\lambda_0),$$

或將 $\cos(\vartheta-\lambda_0)$展开得:

$$\varphi-\varphi_0=\rho\cos\vartheta\cos\lambda_0+\rho\sin\vartheta\sin\lambda_0.$$

根据公式(a), 可分别以 x 和 y 代換乘积 $\rho\cos\vartheta$ 和 $\rho\sin\vartheta$。此时:

$$\varphi-\varphi_0=x\cos\lambda_0+y\sin\lambda_0. \tag{233}$$

上式就是 C. K. 柯斯金斯基公式。

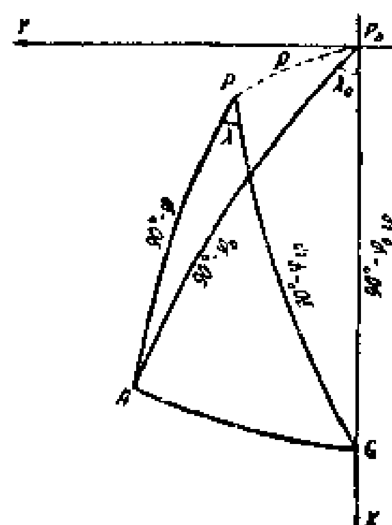


圖 102.

容易确信 (圖 102), A 点的經度也因極移而变化。在圖 102 中, 假設 P、P_0、A之意义与前相同, 而 G 点則为格林尼治。作格林尼治平子午綫 P_0G 和瞬时子午綫 PG, 再作 A 点的平子午綫 P_0A 和瞬时子午綫 PA, 并以大圓弧 AG 連結 A、G 两点, 則得 P_0GA 与 PGA 兩球面三角形, 它的公共边为 AG。依据圖 102, 此兩三角形的各边有以下之值:

$$P_0A=90^\circ-\varphi_0, \qquad PA=90^\circ-\varphi;$$

$$P_0G=90^\circ-\varphi_{0格}, \qquad PG=90^\circ-\varphi_{格};$$

式中字母 $\varphi_{格}$ 表示为格林尼治的緯度, 角頂点为 P_0 和 P 的二角分别为:

$$\angle AP_0G=\lambda_0; \qquad \angle APG=\lambda.$$

按余弦公式由三角形 AP_0G 得:

$$\cos AG=\sin\varphi_0\sin\varphi_{0格}+\cos\varphi_0\cos\varphi_{0格}\cos\lambda_0,$$

由三角形 APG 得:

$$\cos AG = \sin\varphi \sin\varphi_{格} + \cos\varphi \cos\varphi_{格} \cos\lambda.$$

使上二式之右边相等得:

$$\sin\varphi_0 \sin\varphi_{0格} + \cos\varphi_0 \cos\varphi_{0格} \cos\lambda_0 = \\ = \sin\varphi \sin\varphi_{格} + \cos\varphi \cos\varphi_{格} \cos\lambda. \qquad (б)$$

以符号Δ表示坐标因極移而产生的微小变化,即假設:

$$\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi, \quad \varphi_{格} - \varphi_{0格} = \Delta\varphi_{格}, \qquad (в)$$
$$\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda;$$

由此得:
$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \qquad \varphi_{格} = \varphi_{0格} + \Delta\varphi_{格},$$
$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda.$$

因而,若將坐标的正弦和余弦展开为台劳級数,并只取相应坐标增量的一次項,則可写为:

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) = \sin\varphi_0 + \Delta\varphi \cos\varphi_0,$$
$$\cos\varphi = \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) = \cos\varphi_0 - \Delta\varphi \sin\varphi_0,$$
$$\sin\varphi_{格} = \sin(\varphi_{0格} + \Delta\varphi_{格}) = \sin\varphi_{0格} + \Delta\varphi_{格} \cos\varphi_{0格},$$
$$\cos\varphi_{格} = \cos(\varphi_{0格} + \Delta\varphi_{格}) = \cos\varphi_{0格} - \Delta\varphi_{格} \sin\varphi_{0格},$$
$$\cos\lambda = \cos(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \cos\lambda_0 - \Delta\lambda \sin\lambda_0.$$

將以上各式代入(б)式,則(б)式可改写为:

$$(\sin\varphi_0 + \Delta\varphi \cos\varphi_0)(\sin\varphi_{0格} + \Delta\varphi_{格} \cos\varphi_{0格}) + \\ + (\cos\varphi_0 - \Delta\varphi \sin\varphi_0)(\cos\varphi_{0格} - \\ - \Delta\varphi_{格} \sin\varphi_{0格})(\cos\lambda_0 - \Delta\lambda \sin\lambda_0) = \\ = \sin\varphi_0 \sin\varphi_{0格} + \cos\varphi_0 \cos\varphi_{0格} \cos\lambda_0.$$

脫去括号相乘,保留Δ的一級小的各項,舍弃其二級小及高級小各項得:

$$\sin\varphi_0 \sin\varphi_{0格} + \Delta\varphi \cos\varphi_0 \sin\varphi_{0格} + \Delta\varphi_{格} \sin\varphi_0 \cos\varphi_{0格} + \\ + \cos\varphi_0 \cos\varphi_{0格} \cos\lambda_0 - \Delta\varphi \sin\varphi_0 \cos\varphi_{0格} \cos\lambda_0 - \\ - \Delta\varphi_{格} \cos\varphi_0 \sin\varphi_{0格} \cos\lambda_0 - \Delta\lambda \cos\varphi_0 \cos\varphi_{0格} \sin\lambda_0 = \\ = \sin\varphi_0 \sin\varphi_{0格} + \cos\varphi_0 \cos\varphi_{0格} \cos\lambda_0.$$

归并同类項，并括出相同的Δ得：

$$\Delta\varphi(\cos\varphi_0\sin\varphi_{0格}-\sin\varphi_0\cos\varphi_{0格}\cos\lambda_0)+$$
$$+\Delta\varphi_{格}(\sin\varphi_0\cos\varphi_{0格}-\cos\varphi_0\sin\varphi_{0格}\cos\lambda_0)=$$
$$=\Delta\lambda\cos\varphi_0\cos\varphi_{0格}\sin\lambda_0.$$

將上式逐項除以 $\cos\varphi_0\cos\varphi_{0格}$ 得：

$$\Delta\lambda\sin\lambda_0=\Delta\varphi(\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}-\mathrm{tg}\,\varphi_0\cos\lambda_0)+$$
$$+\Delta\varphi_{格}(\mathrm{tg}\,\varphi_0-\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}\cos\lambda_0). \qquad (\text{г})$$

根据(233)和(в)二式，并顧及到

$$\lambda_{0格}=0,$$

則

$$\Delta\varphi=x\cos\lambda_0+y\sin\lambda_0,$$
$$\Delta\varphi_{格}=x.$$

將 $\Delta\varphi$ 及 $\Delta\varphi_{格}$ 之値代入(г)，則得：

$$\Delta\lambda\sin\lambda_0=(x\cos\lambda_0+y\sin\lambda_0)(\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}-\mathrm{tg}\,\varphi_0\cos\lambda_0)+$$
$$+x(\mathrm{tg}\,\varphi_0-\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}\cos\lambda_0),$$

或脫去括号得：

$$\Delta\lambda\sin\lambda_0=x\cos\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}+y\sin\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}-x\cos^2\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0-$$
$$-y\sin\lambda_0\cos\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0+x\,\mathrm{tg}\,\varphi_0-x\cos\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格},$$

或归并同类項，并稍加化算后得：

$$\Delta\lambda\sin\lambda_0=x(1-\cos^2\lambda_0)\mathrm{tg}\,\varphi_0-$$
$$-y\sin\lambda_0\cos\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0+y\sin\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格},$$

或

$$\Delta\lambda\sin\lambda_0=x\sin^2\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0-$$
$$-y\sin\lambda_0\cos\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0+y\sin\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格},$$

或約去 $\sin\lambda_0$ 得：

$$\Delta\lambda=x\sin\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0-y\cos\lambda_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0+y\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格},$$

或根据(в)式之末式，最后得：

$$\lambda-\lambda_0=(x\sin\lambda_0-y\cos\lambda_0)\mathrm{tg}\,\varphi_0+y\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}. \qquad (234)$$

上式为經度因極移而变化的公式。我們应注意到，$y\,\mathrm{tg}\,\varphi_{0格}$

項所計算的是格林尼治經度因極移而产生的变化，換句話說，就是零子午綫本身的移动。(233)与(234)二式表明：緯度和經度的变化与地極坐标 x、y 为同級小量；但对于經度来說，則具有这样的附帶条件，即当 A 点位置不过分靠近地極时，也就是說它的緯度不接近 90° 时，上述結論才是正确的。一般說来，緯度 φ 越大，極移对經度的影响越大，在个別情况下甚至可达到十分之一时秒。經度的变化平均約为 $0^s.01$ 至 $0^s.02$；緯度的变化平均約为 $0''.1$ 至 $0''.2$，但也可能达 $0''.3$，甚至更大一些。

由此可作出兩个結論。

1）因为瞬时坐标与平坐标間的差异很小，在三角函数的符号下是可以加以忽略的，故可用 φ、λ 代替 φ_0、λ_0，將(233)、(234)二式改写为：

$$\varphi-\varphi_0=x\cos\lambda+y\sin\lambda,$$

$$\lambda-\lambda_0=(x\sin\lambda-y\cos\lambda)\operatorname{tg}\varphi+y\operatorname{tg}\varphi_{格}. \qquad (235)$$

2）这种坐标差异与近代观測的精度相比較是非常大的，而且是完全現实的量，除此以外，它們还具有系統的特性。因此，在一等天文观測的計算中，必須顧及这种差异，也就是說必須將观測的成果化至平極，由观測所得的經度和緯度的瞬时值中取中数。在一等的地面目标方位角观測的計算中，也須如此，但这些問題却已屬于野外实用天文学的范疇了。

在这一方面，著名的專家 A. Я. 奥尔洛夫教授認为：緯度的变化决不只是由于極移所致，它还有一些与地極無关的原因存在。他称这种緯度变化为**非極移变化**。平緯度还有在某种程度上隨时間而变的可能。若这是对的，則平緯度的概念必須按如下所說加以进一步地闡明：**即称無周期变化的緯度为平緯度**。这样确定，对往后研究有关極移問題时是有很大意义的。

由于天体的地平坐标 z 和 A 及其时角 t 与观測地的地理坐标

φ 和 λ 有关，因此与地平圈及子午圈有关的已經算得的天体坐标也隨 φ 与 λ 的变化而变化。Δz, ΔA 及 Δt 是由于地理坐标变化的結果，即

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_0, \qquad \Delta\lambda=\lambda-\lambda_0;$$

$\Delta\varphi$、$\Delta\lambda$ 与瞬时地極的坐标 x、y 的关系以(235)式表示。为了研究 Δz、ΔA 及 Δt，我們按下法进行。

取大家所知道的球面天文学中的三个基本公式:

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

$$\sin z\sin A=\cos\delta\sin t,$$

$$-\sin z\cos A=\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\cos t,$$

再取已知的(17′)式:

$$t-t_0=\lambda_0-\lambda,$$

式中 λ_0 为观測地的平經度(向西为正)，t_0 为与此經度相应的天体的时角。視 z、A、t、φ 及 λ 为变数，δ、λ_0 和 t_0 为常数，微分以上各式。

由上述最后的(17′)式直接得:

$$dt=-d\lambda,$$

故
$$\Delta t=-\Delta\lambda. \tag{I}$$

今依 z、φ 和 t 微分上述基本公式中的第一式:

$$-\sin z\,dz=(\cos\varphi\sin\delta-\sin\varphi\cos\delta\cos t)d\varphi-\cos\varphi\cos\delta\sin t\,dt.$$

約去 $-\sin z$ 后，应用基本公式中之第二式和第三式，則得:

$$dz=\cos A\,d\varphi+\cos\varphi\sin A\,dt,$$

或以有限变量代替微分則得:

$$\Delta z=\cos A\,\Delta\varphi-\cos\varphi\sin A\,\Delta\lambda. \tag{II}$$

其次，依 z、A、t 及 φ 微分基本公式中的第三式，結果可写为:

$$-\cos z\cos A\,dz+\sin z\sin A\,dA=$$

$$=-(\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\cos t)d\varphi+\cos\delta\sin\varphi\sin t\,dt.$$

將上式左边第一項移至右边，幷应用基本公式中的第一式和第二式，则得：

$$\sin z \sin A\, dA = \cos z \cos A\, dz - \cos z\, d\varphi + \sin\varphi \sin z \sin A\, dt.$$

把剛才所求得的 dz 的表达式代入上式：

$$\sin z \sin A\, dA = \cos z \cos A(\cos A\, d\varphi + \cos\varphi \sin A\, dt) -$$
$$- \cos z\, d\varphi + \sin\varphi \sin z \sin A\, dt.$$

經过簡單的換算，幷約去 $\sin A$ 后，得：

$$\sin z\, dA = -\cos z \sin A\, d\varphi + (\sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A)dt.$$

在定位三角形 $PZ\sigma$ 中，应用五元素公式于边 $90^\circ - \delta$ 及角 q 得：

$$\cos\delta \cos q = \sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A.$$

依据此式可將前一式改写为：

$$\sin z\, dA = -\cos z \sin A\, d\varphi + \cos\delta \cos q\, dt,$$

由此得
$$dA = -\frac{\sin A}{\operatorname{tg} z} d\varphi + \frac{\cos\delta \cos q}{\sin z} dt.$$

以有限变量代替微分，最后得：

$$\Delta A = -\left(\frac{\sin A}{\operatorname{tg} z}\Delta\varphi - \frac{\cos\delta \cos q}{\sin z}\Delta\lambda\right). \qquad \text{(III)}$$

公式(I)、(II)和(III)是 t、z 和 A 的变化与由极移所引起的地理坐标的变化的关系式。

第七章　星表·归化計算

§63. 岁差、章动、光行差和恒星自行对恒星坐标的总影响·視坐标、真坐标和平坐标

在第五章和第六章內，我們較詳細地研究了引起恒星及其他天体坐标变化的一切現象：即蒙气差、太陽的周日視差、恒星的周年視差、周年光行差、周日光行差、日月岁差、行星岁差、章动、恒星自行及地極移动。在这些現象中，蒙气差和周日視差是直接与天頂距有关的，此兩种現象和周日光行差以及極移影响与观測地有密切的关系。

周年視差、周年光行差、岁差、章动和恒星自行与恒星的黃道坐标和赤道坐标的变化有着更密切的关系。但对我們来說，最重要的是与赤道坐标的关系。由于这些現象很重要，特別是在实用方面，所以我們將詳細地来論述它們。

因为恒星沒有周日視差，故对于恒星的地面坐标和地心坐标，就沒有必要来加以区別。可以这样說，对于恒星，我們永远可以直接求其地心坐标。

但是，絕大多数的恒星同样沒有明显的周年視差。这就是說，在实际上，仅仅对在§49（参閱第215頁）中所列举的少数恒星，我們才將其地心坐标与日心坐标加以区別。对于这些恒星，由于有周年視差的影响，我們必須从地心坐标化算成日心坐标，或反算之。若將这样很少遇到的情況置而不論，則可以說，对于恒星，我們可以直接求其日心坐标。

但我們知道恒星在周年（和周日）光行差的影响下是移动的，

所以直接由观測求得的坐标称为視坐标。化至不因光行差（周年的或周日的）的影响而变动之位置的恒星坐标，正如我們所知道的，叫做眞坐标。欲化眞坐标为視坐标，必須將光行差的影响添入眞坐标內；欲化視坐标为眞坐标，則必須从視坐标內除去周年光行差和周日光行差的影响，这是就其微小程度尙不能省略的情况而言的。此时，眞坐标就是化至观測瞬間的坐标圈、点位置的坐标，即化至观測瞬間的眞赤道、眞極分圈、眞極和眞春分点的坐标。簡單地說，眞坐标就是化至观測瞬間眞分点的坐标。

但是，因为章动的关系，眞坐标圈、点对平坐标圈、点有位移，所以欲求得观測瞬間的恒星坐标，即化至平坐标圈、点的位置坐标，或者說化至观測瞬間的平分点的坐标，則必須顧及到章动的影响。因为要从平坐标化为眞坐标，必須將章动影响添入平坐标內，所以，反过来要从眞坐标化为平坐标，就必須相反地从眞坐标內除去章动的影响。如果我們进行这样的計算，則得观測瞬間的恒星平坐标。

但是平極、平赤道和平春分点总是因岁差而在不断地变化，因此，在观測历元的恒星平坐标与其化至另一历元的平春分点的坐标不同。因而，它們因岁差而發生变化；但这种变化，正如我們所知道的那样，在第一次近似中，可以把它們視为与时間成比例的，特别是对于較短的时間間隔来說，更是如此。所以我們可以說，恒星的平坐标是变化的，并近似地与时間成比例地变化着。

恒星的平坐标还由于恒星的实际运动，即由于恒星的自行而發生变化。这种坐标变化几乎可以認为恰与时間成比例。

因此，我們可以看出，恒星平坐标的不断变化是由于以下兩个原因所致：岁差和恒星自行；而这种变化又是与时間近似地成比例。若把这些变化視为精确地与时間成比例的話，那末計算所及的时間間隔越短，則所产生的誤差就越小。

为了説明上述問題，以及为了明显地在数値上和实質上区别开我們所研究的各种坐标变化，我們来研究一下具体情况，卽研究一下仙后座王良三(参閱"苏联天文年历" η Cass. № 18)的坐标变化。这是第215頁表中的第一顆星。自"天文年历"中查出它在1953年及1954年每隔30个恒星日的各瞬間的視坐标如下：

日期	α	δ
1953年 1月1日	$0^h46^m15^s.17$	+57°34′21″.3
1月31日	14.33	19.0
3月2日	13.70	12.9
4月1日	13.60	5.4
4月30日	14.20	33 59.2
5月30日	15.39	56.5
6月29日	16.91	58.1
7月29日	18.41	34 3.8
8月28日	19.59	12.3
9月27日	20.29	22.0
10月27日	20.45	31.1
11月26日	20.14	38.0
12月26日	19.46	41.0
1954年 1月1日	$0^h46^m19^s.30$	+57°34′41″.2
1月31日	18.45	38.8
3月2日	17.82	32.7
4月1日	17.71	25.1
4月30日	18.29	18.8
5月30日	19.48	16.0
6月29日	20.99	17.6
7月29日	22.48	23.2
8月28日	23.66	31.6
9月27日	24.36	41.2
10月27日	24.52	50.2
11月26日	24.20	57.1
12月26日	$23^s.52$	35′0″.2

为了更明显起見，我們將这些視坐标繪于圖上(圖 103)，在圖中沿橫軸按 $1^s=10$ 公厘的比例表示赤經，沿縱軸以 $1''=1$ 公厘的比例表示赤緯。对每一年內的一切点，我們用罗馬数字按次編号，把这些号碼和上表中所列坐标的日期对照一下，可以看出，这些号碼与相应日期接近月初的月份的号碼近似重合。細察圖 103，我們可以看出，每年所得开口曲綫中的各相应部分彼此很相类似。

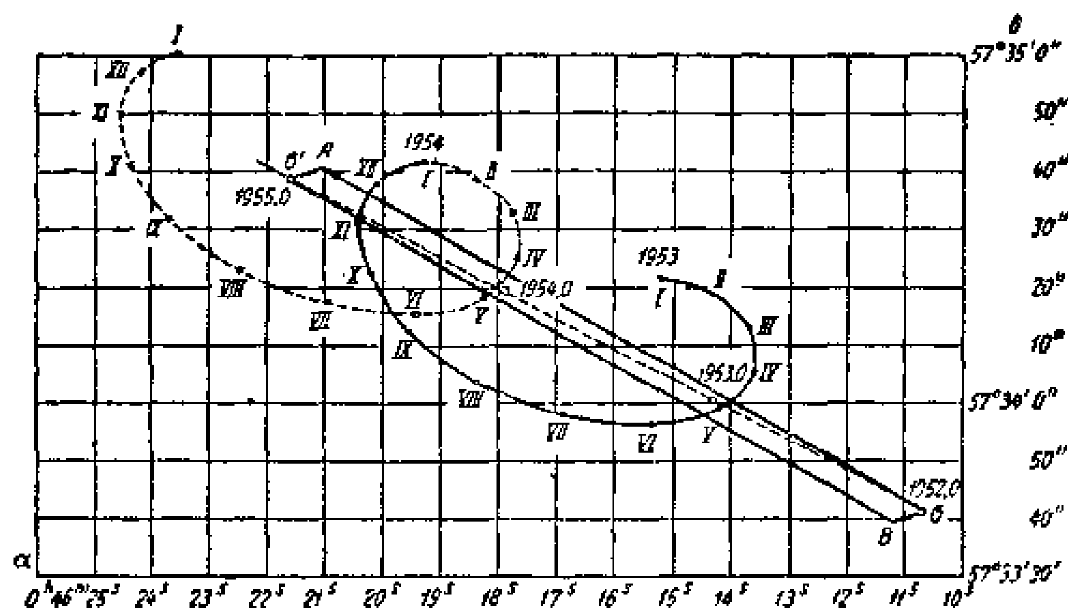


圖 103.

因仙后座王良三的周年視差 $\pi=0''.18$①，故其視坐标也就是它的地心坐标，但与日心坐标相差約为 $\pm0''.2$，因而它在圖的繪画精度范圍以內；很明显，它們是容納在圖上所示的点及綫的粗度內的。

就 1953 年的第一点和 1954 年的第一点計算周年光行差和章动，从而求得这兩年岁首的恒星的平坐标，也就是 1953.0 及 1954.0 历元和分点的平坐标。再加上 1952.0 及 1955.0 的平坐标，則得仙后座王良三平坐标的数值如下：

① 参閱 § 49 第 215 頁中的"具有大視差的恒星表"。

1952.0:	$\alpha=0^h46^m10^s.67$		$\delta=+57°33'41''.4$	
		$+3^s.63$		$+19''.1$
1953.0:	14.30		34 0.5	
		+3.63		+19 .1
1954.0:	17.93		19.6	
		+3.64		+19 .1
1955.0: ①	21.57		38.7	

將这些点描繪在圖 103 上，就可立即看出，所有这四个点几乎精确地位于直綫 $\sigma\sigma'$ 上。这就証明了，平坐标是与时間大致成比例地变化的。此外，直綫 $\sigma\sigma'$ 位于我們剛描出的曲綫的軸的附近。

求出我們所引用的各年岁首平坐标的順次差数之后(它們已記載于中間各列)，我們就能得到叫做赤經和赤緯的周年变化值，这种变化是由于岁差和恒星自行的綜合影响所引起的。今就仙后座王良三求得其周年变化：

赤經周年变化为 $+3^s.63$，

赤緯周年变化为 $+19''.1$.

經精密的測量确定，仙后座王良三的赤經周年自行 μ_α 和赤緯周年自行 μ_δ 之値如下(参閱"1953 年的苏联天文年历"，"恒星平位置表")：

$$\mu_\alpha=+0^s.14;\quad \mu_\delta=-0''.52.$$

据此，我們可作出一向量 $\overrightarrow{\sigma B}$ 来表示由于在三年內恒星自行所引起的位移(圖103)。今將仙后座王良三在此三年內的平坐标总变化卽向量 $\overrightarrow{\sigma\sigma}$ 分为兩个向量：$\overrightarrow{\sigma B}$ 和 $\overrightarrow{\sigma A}$ (按平行四边形法則)。若 $\overrightarrow{\sigma B}$ 表示的是由于恒星自行所引起的位移，那显然向量 $\overrightarrow{\sigma A}$ 是表示仙后座王良三在三年內仅由于岁差所引起的坐标变化。从这个对比中可以很清楚地看出，岁差是平坐标变化的主要原因。例如：卽使我們拿在亮星中具有最大自行的恒星牧夫座大角(参閱"苏联

① 恒星的平坐标 α 和 δ 取自相应年分的"天文年历"("恒星平位置表")。

天文年历" α Boot, № 345)来說,它的周年岁差:

在赤經方面为 $\pm 2^s.66$,

在赤緯方面为 $-16''.7$;

恒星自行: $\mu_\alpha = -0^s.08$,

$\mu_\delta = -2''.00$;

即此星的赤緯周年自行約为赤緯周年岁差的八分之一。

为了說明其他坐标变化的性質,我們从第303頁所列的1953年仙后座王良三的視坐标值中,除去其与时間成比例的坐标变化,也就是除去由于岁差和恒星自行所引起的变化。这一点幷不困难,因为我們已經知道坐标的周年变化。显然,为此只需由每一坐标值中减去下列数值即可:

$$\frac{(\text{周年变化})\times 30}{366.2422}\times(n-1).$$

式中 n 为点的編号。如果我們这样做了,則可求得下列坐标值:

点号	日期	α	δ
I	1月1日	$-0^h46^m15^s.17$	$+57°34'21''.3$
II	1月31日	14.03	17.4
III	3月2日	13.10	9.8
IV	4月1日	12.70	0.7
V	4月30日	13.00	33' 52.9
VI	5月30日	13.90	48.6
VII	6月29日	15.22	48.7
VIII	7月29日	16.32	52.9
IX	8月28日	17.20	59.7
X	9月27日	17.60	34' 7''.8
XI	10月27日	17.46	15.4
XII	11月26日	16.85	20.7
XIII	12月26日	15.87	22.2
I'	1月1日	15.67	22.1

茲以同样的比例作一与前类似的圖形(圖104)。以連續曲綫

联結按坐标描繪的各点，則得一开口的卵形曲綫，它非常近似乎椭圓的形狀。所求得的曲綫清楚地表示出了仙后座王良三由于周年光行差和章动所引起的坐标变化。此星坐标的光行差变化和章动变化的幅角近乎相等，但它們周期是極不相同的：光行差的周期为一年，而章动的周期为 $18\frac{2}{3}$ 年。因此，章动在一年內所引起的坐标变化与光行差所引起的变化相比是很小的。由于这个原因，所得的曲綫基本上是該星的光行差椭圓，但由于章动的影响，这个椭圓稍微有些变形。正因为如此，其形狀表現为一开口卵形曲綫，而不是眞正的椭圓。对于仙后座王良三而言，由于章动和光行差，坐标値在一年中的变动总共为：

圖 104.

α 的变动为 $\pm 2^s.45$，δ 的变动为 $\pm 16''.8$.

对于同屬于 1953 年的牧夫座大角而言，由于这兩个原因而产生的变动为：

α 的变动为 $\pm 1^s.34$，δ 的变动为 $\pm 12''.6$.

也可以計算出，牧夫座大角在一年內的赤緯光行差变动为 $\pm 8''.5$，在整个約为十九年的这一周期內的章动变动为 $\pm 8''$。

現在我們总結一下上面的研究。

由直接观測所得的恒星坐标称为視坐标。欲將其化为眞坐标，則必須顧及周年光行差的影响，以及周日光行差的影响（如果不能忽視的話），这种影响是就观測瞬間計算的，并取其反符号値。欲化眞坐标为同一瞬間的平坐标，必須計算章动的影响。章动的影响也是就观測瞬間計算的，且同样取其反符号値

但天体的平坐标是不断地变化的，其原因有二：岁差与恒星自

行。故如上所述，給予任一恒星的平坐标时，必須指出坐标所屬的瞬間，或所謂的这些坐标的原元。

§64. 在天文观測計算中坐标变化的計算程序

在野外天文測定中，通常或是測量天体的一个地平坐标，卽天頂距或方位角，或是記下天体位于某一天頂距或某一确定的方位角时的瞬間。关于这一些，在野外实用天文学中有詳細的論述。

若观測的是天体的天頂距，則顧及所有的仪器誤差，求得仪器天頂距。我們的第一个工作，是計算蒙气差而求得改正天頂距。

如果观測的是太陽，則它的改正天頂距將是它的地面天頂距，而观測必須归算至地球中心，卽必須顧及周日視差的影响，求出观測瞬間的太陽的地心天頂距。一切有关視差与蒙气差的計算，通常与整理观測手簿中的数据同时进行。

太陽的地心天頂距或恒星的改正天頂距，同时又是視天頂距，因为我們还沒有顧及到由于观測者的移动，卽光行差的影响所引起的天体方向的变化。

若观測的是天体的方位角(或一般的为水平角)，則可立刻考虑仪器誤差而求得視方位角，这是因为無論蒙气差或周日視差对方位角都沒有影响。

若在观測时所記的是天体位于某一确定位置时的瞬間，則此位置無疑是天体的視位置。視位置由天体的視坐标所决定，而其中又以視地平坐标为主。

因此可以說，从观測中我們可以直接求得天体的視地平坐标，在这兒一般我們所指的是它們在天球上的視位置。

观測結果的下一步計算，正如在野外实用天文学中所詳細叙述的那样，就是由定位三角形$PZ\sigma$(圖 105)中导出公式，来建立已知量、所求量及观測値間的关系。以后的一切計算都是按这些公

式进行的。

依据上述的理由，需要特别指出的是，在定位三角形中的σ应視为天体在观測瞬間的視位置。

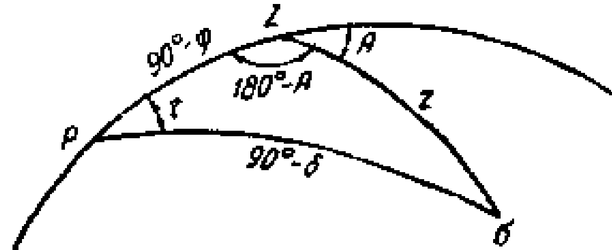


圖 105.

因此按上述公式計算时，应該將天体的視坐标用于公式中，其中特别是視赤經α和視赤緯δ。

假如我們仅知道在某一年岁首即某一历元时的平赤道坐标，例如从星表（詳見下节）中查得，（星表中所載的是屬于星表原元的許多恒星的平位置和其他补助値）则尙需作如下的預备計算。

(1)計算由观測年岁首到星表历元期間若干个整年間的岁差和恒星自行，求得观測年岁首的恒星的平坐标

(2)計算由观測年岁首至观測瞬間这一期間內的岁差和恒星自行，求得观測瞬間的恒星的平位置。

(3)計算观測瞬間的章动影响，求得該瞬間的恒星的眞位置。

(4)計算观測瞬間的周年光行差的影响，求得这一瞬間的恒星的視坐标。只有作了这些預备計算之后，才有可能按由定位三角形所得的公式計算未知量。計算的时候將所得的視赤經α和視赤緯δ代入式中，因为只有这样，上述公式才能适合閉合的球面圖形，即球面三角形$PZ\sigma$——恒星視位置的定位三角形。

上述的(2)、(3)、(4)款的演算，綜合起来叫做視位置計算。

当在高精度的观測計算时，特别是对于近極星($\delta \geqslant 80°$)，尙須計算周日光行差的影响。正如我們所知道的那样，只有知道了观測地的緯度和观測瞬間的地方恒星时（那怕是近似的也好），周日光行差影响的計算才有可能。

但是必須指出，周日光行差影响的改正数通常不加入天体的坐标内，而加入最后的計算結果內，也就是加入所求得的緯度，时間或方位角內，加此种改正数的公式在野外实用天文学中导出。

地極移动的改正数，卽所謂平極改正数，同样加入緯度、經度和方位角的最后測定結果中。这些改正数的計算是在观測和观測計算完畢以后尙須經过一段时間才能进行。这是由于国际緯度局在其观測后，要經过很長的时間才公布地球瞬时極的最后坐标 x、y 的緣故。这也就說明了国际緯度局直到現在所采用的計算方法还是很煩瑣的。至于波尔塔瓦重力观測站在極短期間內計算出的地極坐标(按 A.Я.奧尔洛夫法)，目前还不能認为是最后的結果，因为它只是利用了少数緯度站的观測資料。

§65. 星表·天文台的星表編制工作

星表或恒星位置表就是这样的表，在表中載有一定数量恒星(由几个到几百个或几千个)的平赤道坐标以及各种其他的数据——例如这些坐标的周年变化和恒星自行。

必須把下述兩类星表区别开：一类是根据某一个天文測量員或某一个天文台在某一有限而不太長的期間內所測的成果編成的，下面我們称这类星表为原始星表；另一类是在某种程度上根据互不相关的若干原始星表編成的，称这类星表为复制星表或綜合星表。

原始星表又分为絕对星表、微差星表(或相对星表)和概略星表三种。

在編制絕对星表时，恒星的坐标只能按实測的观測成果来确定。不論是坐标、不論是归化值或常数值都不能被假定为是已知的；所有这些值，不管它們以前是否确定过，都应該从新推求出来。虽則許多恒星的坐标值以及对观測归算所必需的各种常数值是知

道的，并具有很高的精度，但当絕对确定时，这些数值是看作近似的，因而必須重新求得为了精确这些数值所需的改正数。

編制微差星表时，則相反。許多所謂基础星的赤道坐标值認为是已知的；例如，它們由某一絕对星表中取得。被測定星的坐标也是根据观測所得的坐标与基础星的坐标之差而决定的。

概略星表所載的恒星坐标，是按赤緯平行圈所划定的某一个区域內到某一星等的全部恒星的近似坐标。在編制时，应力求包含有半个天球甚至是整个天球的恒星。

这三种类型的星表彼此間的差別，就在于它們所載的坐标的精度和恒星的数目是各不相同的。絕对星表具有很高的精度，但所載恒星的数目比較少，由几十个到几百个；微差星表的精度較低，但包含有几百个或几千个恒星；概略星表的目的，虽是載出恒星的近似坐标，但可載有大量的恒星。

現在来談复制星表或綜合星表，即根据若干尽可能是互不相关的原始星表（絕对的或微差的）而編成的星表。必須指出，这里將会遇到所謂的基本星表或标准星表以及狹义的綜合星表。

基本星表主要是根据彼此完全独立的一些絕对星表編成的，同时，在每一次編制时，所有的常数和归算値都必須重新根据已收集的資料独立地加以确定，并重新导出恒星自行及其坐标。

在編制狹义的綜合星表时，可以利用微差星表和在某些方面接近于所編星表的基本星表。

这样，我們可把恒星位置表分类如下：

一、原始星表：

(1)絕对星表；

(2)微差星表；

(3)概略星表。

二、复制星表：

(1)基本星表；

(2)綜合星表。

但我們应当說明，目前尚未拟定出統一的星表分类法和在这方面的术語。此外，还应說明一点，所有的分类在一定的程度上都是假定的，它們不可能全部包括一切在实际中可能遇到的情况。这一点也完全适合上述的星表分类。因而我們可能遇到在上述分类中沒有的星表。我們同样可能遇到这样的情况，原始的絕对星表常称为基本星表，而基本星表称为普通星表等等。

現在較詳細地来談一談原始星表和天文台在編制这类星表，首先是絕对星表时的工作。

为了絕对地測定恒星的赤經和赤緯，必須利用当天体在上中天和下中天經过子午圈时所进行的观測。

根据(18)、(21)和(23)三式(参閱 § 19)，就天体在天頂南上中天，我們可以写出

$$\delta = \varphi - z_m; \qquad (\text{а})$$

若天体在天頂和北極之間上中天，則

$$\delta = \varphi + z_m; \qquad (\text{б})$$

对于下中天：

$$\delta = 180^\circ - (\varphi + z_m), \qquad (\text{в})$$

式中 z_m 和以前一样，表示在中天瞬間的恒星的天頂距

由以上公式可以看出，为了測定恒星的赤緯，必須尽可能精确地測得恒星經过子午圈瞬間的天頂距。为此，大多数天文台采用了結構如圖106所示的子午环。子午环由一个繞水平軸 CD 轉动的天文望远鏡 OE 及固結在水平軸上的大刻度盤 KL 所組成。刻度盤 KL 与望远鏡一起轉动。仪器借軸樞 C 和 D 安裝在石柱 AC 和 BD 上，而石柱

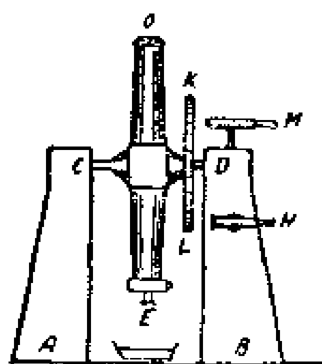


圖 106.

是建筑于坚实的台基上的，此在圖中未示出。为了使观测者的走动不破坏仪器的准确性，石柱和台基应与子午仪室的地板和子午仪室的地基分离。圖中 O 为物鏡，E 为目鏡，M 和 N 是固定于石柱 BD 上用来讀取垂直刻度盤的两个測微鏡。仪器应这样安置，使軸 CD 真正水平，使軸的方向准确地指在东西方向。在望远鏡 EO 的照准軸与轉軸 CD 垂直的条件下，望远鏡繞 CD 軸旋轉时，照准軸始終在子午面內，子午面以張于物鏡焦面上的垂直蛛絲显示于望远鏡的視場中央。此外，在物鏡焦面上还有一根与垂直絲垂直的水平絲。但实际上交合絲是有更复杂的結構的。在这里我們还把仪器的整置和構造的誤差撇开了，实际上仪器是常有这些誤差的。可以說，在这里我們認为仪器是理想的，它已經过精确地設計、改正和整置的。

为了測定赤緯面进行的观測程序如下。观測者在恒星經过子午圈的瞬間，卽恒星与垂直絲相交的瞬間，用水平絲照准恒星，然后用測微鏡 M 和 N 讀出刻度盤 KL 的讀数。为了要根据刻度盤讀数以求得所測的天頂距，就必須知道当望远鏡照准軸完全垂直时相应于望远鏡这一位置的讀数。若此时望远鏡的物鏡朝上，則此讀数叫做**天頂位置**，以 M_z 表示；若望远鏡的物鏡朝下，則此讀数称为天底位置 $M_{z'}$。显然 M_z 和 $M_{z'}$ 正相差 180°。子午环的天底位置借**水銀平面**来測定。所說的水銀平面是一个裝有水銀的淺金屬盤，它置于石柱 AC 和 BD 之間的望远鏡底下。若望远鏡的物鏡 O 朝下，則由目鏡向下看，可以使望远鏡視場中直接看見的蛛絲与其由水銀面反射象达到精密的重合。此时，望远鏡 EO 的照准軸是垂直的。望远鏡在这样的位置时，度盤 KL 的讀数就是所求的天底位置 $M_{z'}$。

因此，測定了天底位置之后，我們經常可以測出天体的子午天頂距 z_m。但除此之外，在(a)、(б)和(в)式中尙有观測地的緯度 φ。

为了用同一的观测結果来同时确定出 δ 和 φ，那就必須測出同一不落星(拱極星)在上中天和下中天时的天頂距。若星在天頂北上中天，則按(б)和(в)式得：

$$\delta=\varphi+z_{\text{в}};\quad \delta=180^\circ-\varphi-z_{\text{н}}, \tag{г}$$

式中 $z_{\text{в}}$ 和 $z_{\text{н}}$ 分別为其上中天和下中天时的天頂距。取此二式的半和及半差，得：

$$\delta=90^\circ-\frac{1}{2}(z_{\text{н}}-z_{\text{в}}),$$

$$\varphi=90^\circ-\frac{1}{2}(z_{\text{н}}+z_{\text{в}}).$$

若星在天頂南上中天，則按(а)和(в)兩式首先导出：

$$\delta=\varphi-z_{\text{в}},\quad \delta=180^\circ-\varphi-z_{\text{н}}; \tag{д}$$

然后用上述相同的方法求得：

$$\delta=90^\circ-\frac{1}{2}(z_{\text{н}}+z_{\text{в}}),$$

$$\varphi=90^\circ-\frac{1}{2}(z_{\text{н}}-z_{\text{в}}).$$

用同样的方法观測一系列的在地平上有上中天和下中天的星。由于此时所測得的不是 z，而是与 z 有关的 z'：

$$z=z'+\rho.$$

式中 ρ 为蒙气差，所以当絕对确定赤緯的时候，必須求出蒙气差常数的改正数及上述的緯度值，或者正确地說，求出所采用的近似緯度值的改正数。这样一来，方程(г)或(д)將具有 §51 中方程(I)或(II)的形式，其計算按最小二乘法进行，基本方法如 §51 末尾所述的一样。

因为有許多其他的恒星是与拱極星同时观測的，所以它們的赤緯也可按(а)(б)和(в)三式求得。此时緯度 φ 及蒙气差常数之値根据拱極星的观測来求得；这是完全有根据的，因为这些星的观測是在同一日期內同时进行的。

对于恒星赤經的絕对测定，除了子午环外，还必須有一个正确表示恒星时的天文表。在观测某星测定赤緯时，同时用天文表記下它的望远鏡視場內与垂直絲相交时的瞬間。由于仪器在安置时其垂直軸与子午圈是重合的，所以按天文表記下的瞬間 T 就是恒星經过子午圈的瞬間。但即使是最好的最精确的表也不能准确地指示出恒星时 s。为了求得正确的时間，例如恒星时 s，在表面时 T 上应加入一代数量 u，此代数量 u 叫做时鐘改正。根据这一定义，我們可以写出：

$$s=T+u. \tag{236}$$

另一方面，由于星在上中天时

$$s=\alpha,$$

而在下中天时 $$s=\alpha\pm12^h,$$

所以，在观测瞬間对每一顆星来說，在上中天則有

$$\alpha=T+u, \tag{e}$$

在下中天則有： $$\alpha=T+u\mp12^h. \tag{ж}$$

若在同一日期同一中天观测了許多顆星，那末我們不可能直接决定它們的赤經，因为不知道时鐘改正；但是我們可以决定此等星的赤經对于其中任一顆星的赤經之差，或其中任何一顆星的赤經对任何另一顆星的赤經之差。依照实踐經驗，最好是直接由观测中求出中天瞬間彼此接近的兩星赤經之差。因此，对于任一中天观测，我們同样求得：

$$\alpha_1-\alpha_0=T_1-T_0,$$

$$\alpha_2-\alpha_0=T_2-T_0,$$

$$\alpha_3-\alpha_0=T_3-T_0,$$

$$\alpha_4-\alpha_3=T_4-T_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_k-\alpha_i=T_k-T_i,$$

式中脚符号 $_{0}$、$_{1}$、$_{2}$、$_{3}$、……$_{i}$……$_{k}$ 系表示相应量之屬于这个或那个星。

为了测定絕对赤經，还必須在整日观测恒星的同时，按同样的程序，用同样的仪器在接近春分和秋分的眞午正瞬間观测太陽。此时，测定太陽的子午天頂距，并用同样的表記下观测瞬間。从这些观测中，可以求出观测瞬間太陽的赤緯 $\delta_{\odot}$ 以及所观测的星与太陽的赤經之差：

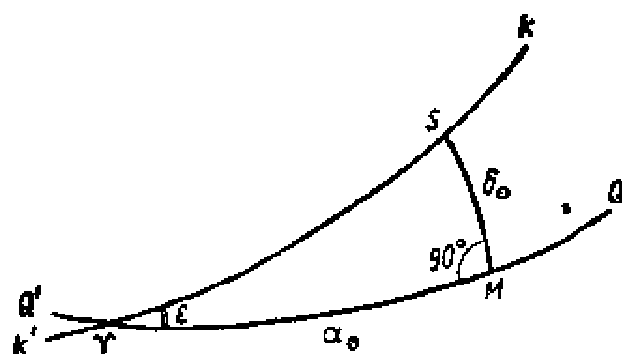


圖 107.

$$\alpha_0-\alpha_{\odot},$$
$$\alpha_1-\alpha_{\odot},$$
$$\alpha_2-\alpha_{\odot},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_i-\alpha_{\odot},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_k-\alpha_{\odot}.$$

但是，对太陽来說，由圖 107 所示的直角球面三角形 γSM（其中 $Q'Q$ 为赤道，$k'k$ 为黃道，S 为太陽）可写出：

$$\sin\alpha_{\odot}=\operatorname{tg}\delta_{\odot}\operatorname{ctg}\varepsilon. \tag{237}$$

因而，若預先測定了黃赤交角 ε，則依照所測得的太陽的赤緯 $\delta_{\odot}$ 可以算出太陽的赤經 $\alpha_{\odot}$、同时可求得与太陽同日观测的恒星的赤經，以及其余所观测的一切恒星的赤經。

为了测定 ε，必須用子午环在夏至和冬至那一天的眞午正观测太陽的赤緯。在夏至那一瞬間：

$$\delta_{\odot}=\varepsilon,$$

在冬至那一瞬間：

$$\delta_{\odot}=-\varepsilon.$$

在实踐中，我們并不仅限于在分至日附近观测太陽，而在整年內观测之，并按最小二乘法計算观测成果。在全年中与观测太陽

的同时，尙观测專門选定的四十多顆亮星，它們可以在白天用望远鏡观測。这些恒星尽可能按赤經均匀地布置。其余恒星的观測应与这些所謂主星或时星的亮星的观測相联系。太陽、主星及其余的一切恒星的絕对赤經就是这样測定的。

現在来說明天文台編制微差星表的工作。

在此种情况下，观測仍用子午环进行，但以某一絕对星表、基本星表或綜合星表作为工作基础；此时，这些星表中的赤經和赤緯都認为是已知的，而任务只在于依据这些星表中的星来确定其他許多恒星的赤道坐标。这些基础星和新測定的星交錯地进行观測。这些星的观測和以前所說的一样，乃在当星經过子午圈时以仪器的水平絲照准星，用表記下星經过垂直絲也就是經过子午圈的瞬間，并讀出垂直度盤的讀数。

由为已知 α_0 及 δ_0 的基础星的观測中，首先，我們將望远鏡指向赤道上某一点，并确定相应于这一位置的度盤讀数。这一讀数叫做赤道位置，以 M_Q 表示。显然，赤道位置 M_Q 等于照准基础星时的度盤讀数 R_0 減去这个星的赤緯 δ，即

$$M_Q = R_0 - \delta_0.$$

由此可見，观測任一所选定的恒星的时候，其赤緯 δ 为照准此星的度盤讀数 R 減赤道位置之差，即

$$\delta = R - M_Q.$$

第二，由基础星的观測中可以确定时鐘改正 u。事实上，若基础星在上中天时观測，则(e)式可写为：

$$\alpha_0 = T_0 + u,$$

式中 α_0 和 T_0 分别为基础星的赤經和观測时刻。就基础星在下中天的观測而論，则依(ж)式求得：

$$\alpha_0 = T_0 \mp 12^h + u.$$

在此兩种情况中，α_0 由作为工作基础的星表中查得，而 T_0 由

观测手簿中取得。因而时鐘改正 u 由下列关系式求得:

$$u=\alpha_0-T_0,$$

或由下式求得:

$$u=\alpha_0-T_0\pm12^h;$$

究竟用何式,則依基础星在上中天观测还是在下中天观测而定。

当这样确定了时鐘改正 u 以后，待测恒星的赤經 α 可直接按(e)及(ж)式求出,即

$$\alpha=T+u,$$

或

$$\alpha=T\mp12^h+u,$$

此二式之采用，同样依待测恒星在上中天观测还是在下中天观测而定。

这样,对于赤經、赤緯的微差测定，必須知道許多所謂基础星的赤道坐标;因而,新测定的星的坐标是在作为工作基础的这种絕对星表或基本星表的体系中求得的。

一般来說，星的赤道坐标 α 和 δ 是在大天文台里用固定的大型天文仪器测定的。而这兩个坐标多半是用所謂的子午环（格林尼治系統)同时测定的，但有时也象下面所說的那样，α 和 δ 是分別测定的(普尔柯沃系統);此时,测定 α 用的是大型子午仪，测定 δ 用的是大型的垂直大圈仪(參閱 § 66)。

按預定的計划精密地进行观测,并一連进行观测若干年,在这一期間內,所定計划中的每一顆星重复观测若干次;显然，每次观测中都可以求得每一顆星在观测瞬間的視赤經和視赤緯。

天文員在整理观测結果时,首先应該按照上述的步驟,計算計划內的每一顆星的每次观测瞬間的平坐标，也就是計算这一瞬間的光行差与章动的影响。为了能使这些独立的成果彼此間可以比較和以后把它們納入統一的系統，必須將每一观测瞬間的平坐标化算到同一历元。为此，首先須將任一年內所作的全部观測化算

至該年的岁首。要完成这一化算，必須計算由岁首至观測瞬間的岁差和自行对該星的影响，并从观測瞬間的平坐标內減去这些影响。于是，我們就求得了該星在观測年岁首的平坐标。

然后，在进行观測以求得某些星的坐标表或通常所謂的星表的那些年分內，任意选择一年，大多数是选择年号的末尾为零或五的那一年的岁首作为此星表的历元。所有各星的全部观測都必需化至这一历元；为此，对每顆星的每一观測都必須計算其由观測年的岁首到星表历元这些年中岁差和恒星自行的影响，而將具有一定符号的改正数加入观測年岁首的平坐标內。

我們求得属于星表历元的平坐标后，將同一顆星的全部观測取其中数，一般借助于所有資料的进一步整理，將其納入一个系統內，編制这些星的平赤道坐标表。这就是所謂的原始星表。

§ 66. 普尔柯沃恒星位置表

上节所述的天文工作，在很久以前，世界上許多天文台便以不同的規模进行着，因此原始恒星位置表到目前已有很多，其数决不下于五百个。

在这許多的原始恒星位置表中，享有盛名和荣誉的普尔柯沃天文台的星表占着極其卓越的地位。可以認为，普尔柯沃天文台在編制星表这方面的工作是划时代的，它不仅在苏联的天文史上而且也在世界的天文史上开辟了新的一頁。

有系統地編制內容丰富和精度很高的星表工作，从普尔柯沃天文台在 1839 年創立起，就在它的業务中占据了最重要的地位。这些星表之所以有很高的質量，是因为：所用的仪器是精良的，观測員的技术是非凡的，以及为了尽可能完全消除和計算一切系統誤差所作的工作是細致而周全的。

在普尔柯沃天文台的工作中，从一开始就把恒星位置表分为

絕对的和相对的(或微差的)兩类。它对于赤經、赤緯的絕对測定法的研究就特別重視，并在这方面創造出了一套特有的普尔柯沃系統，这一系統在以后被証明是正确的。普尔柯沃系統的基本特点，就是每一坐标的絕对測定由兩个在工作上互不相关的观測者各用專門的仪器进行。

普尔柯沃天文台最先采用大型垂直大圈仪測定絕对赤緯，这种仪器是根据該台的創建者和首任台長 В. Я. 斯特魯維的理論和意見进行設計和制造的。仪器的結構大致如圖 108 所示。仪器整置在堅实的石質基座上，此基座应与观測室的地板和地基分离。基座上安置一沉重的銅柱 AB，它借兩个圖上未表出的校正螺旋可校到垂直位置。銅柱内裝有磨得非常光滑的垂直軸，仪器的整个上部就在此軸上沿水平方向轉动。支架 N 及軸承 C 是牢固地緊联在垂直軸上的，水平軸 LL' 裝在此軸承上。大的精密的刻度盤 KK' 和望远鏡 OO' 固定在水平軸的一端。把一个裝有讀刻度盤用的測微鏡 M 和 M' 及一个很灵敏的水准器的照准部固定在一軸承上。普尔柯沃的垂直大圈仪共有四个測微鏡，它們都固定在一个專門的框架上。关于这种仪器的大小可按下列数字見其概略：物鏡的直徑为 148 公厘，焦距稍大于 2 公尺，分划刻度盤的直徑为 110 公分，分划值为 $2'$。

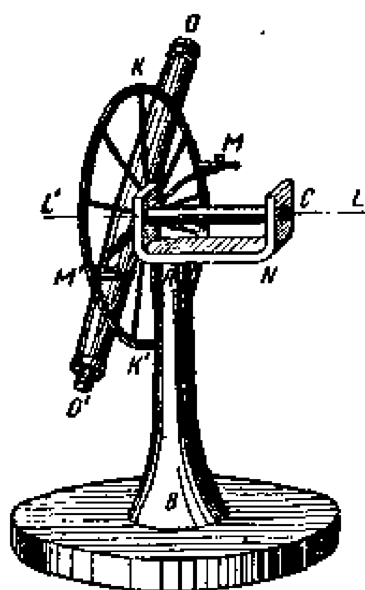


圖 108.

后来，这种仪器經过了改良，变得更加良好和完善了。例如，在 1875 年，垂直刻度盤上刻了新的更精确的分划；稍后一些，又在望远鏡上安裝了目鏡測微器。用目鏡測微器測定赤緯的观測程序是这样的：置望远鏡于子午圈内；在恒星經过子午圈之前，用目鏡

测微器的水平絲照准恒星数次，并借测微鏡讀取垂直刻度盤的讀数；然后將仪器旋轉一百八十度，縱轉望远鏡并重新指向恒星；在恒星經过子午圈后又立刻用测微器的水平絲照准数次，并借测微鏡讀取垂直刻度盤讀数。用这种观测程序的时候，如在实用天文学中所証明的那样，所观测的星的子午天頂距是將已加测微器改正的兩垂直刻度盤讀数的半差。在实际作業中，还必須加上屬于仪器性質的某些微小的改正数，以及由于在子午圈附近观测而不是恰在經过子午圈时观测的归化改正数。

这样一来，在測量恒星和太陽的天頂距时，不需要精密地知道天頂位置 M_z，因为天頂位置由于是在仪器的兩个位置上进行观測而每次都自动地消失了，并且还因为天頂距可直接根据在星的观測过程中所讀取的垂直度盤讀数求出。垂直大圈仪作为絕对測定赤緯的仪器，对子午环的巨大优越性就在于此。实际上，用子午环借水銀平面測定天底位置的这一繁杂的操作，只有断断續續地經过很長的时間間隔才能結束，而其精度又要比用垂直大圈仪照准恒星所得的小。而主要的在于这些天底位置的專門測定（或天頂位置）之間的时間間隔常常是很長的，因而天文測量員不能徹底获得有关天底位置数值变化的任何情况。由于垂直大圈仪具有这种优越性，用它測定的絕对赤緯的精度增加到这样的程度：用垂直大圈仪进行一次观測，等于用子午环进行許多次观測（根据某些权威者的看法，等于 30 次）。

为了測定絕对赤經，В. Я. 斯特魯維在普尔柯沃使用了大型中星仪。这种仪器和子午环一样，整置于子午圈內，不同的地方，仅仅是沒有一个大的精密刻划的垂直刻度盤。因此，它只能用来观測恒星及其他天体的子午經过。圖 109 所示为大型中星仪，它备有一切近代的改良部分及精助性的仪器。在左驅軸附近可看到一个不大的导星盤，它为按所測恒星的天頂距相应的高度設置望远

鏡所必需的。在望远鏡的左右兩側，各裝有一个木質把手——类似圓环或舵輪；天文測量員握着把手，在必要时，繞水平軸轉动望远鏡。在水平軸上裝有一个灵敏的水准器。

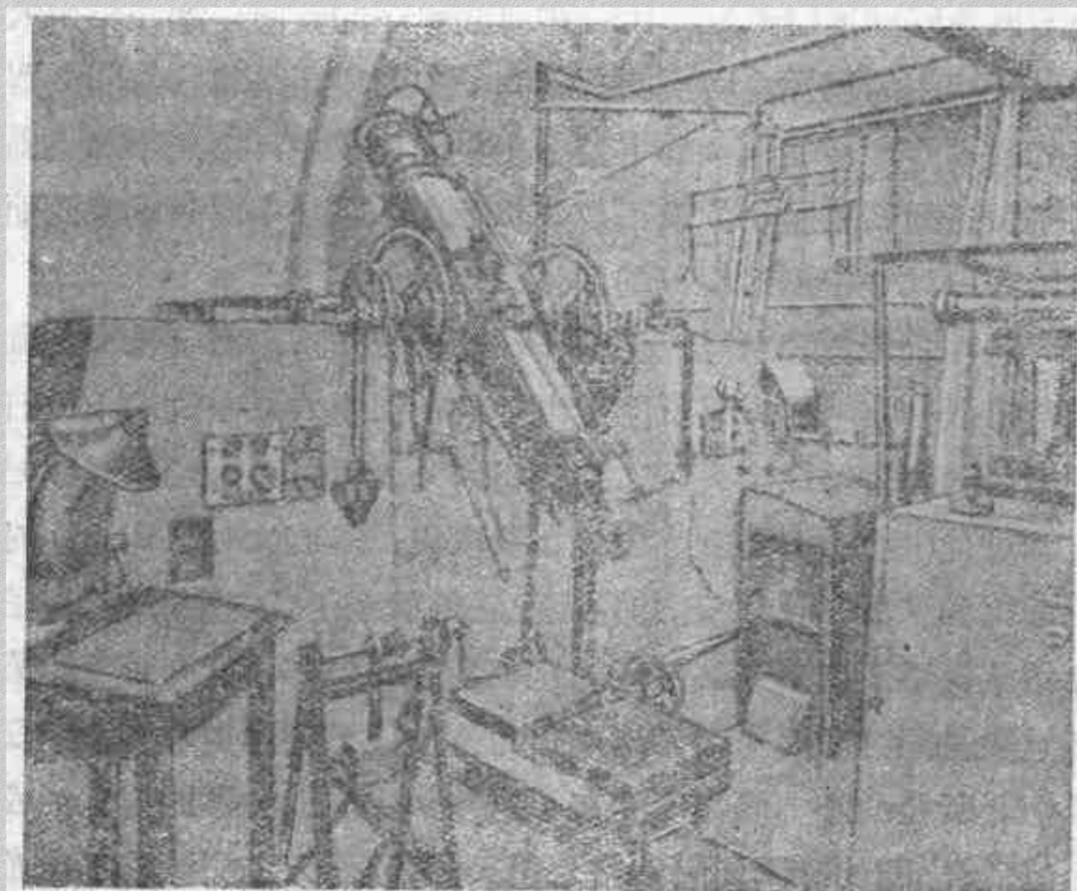


圖 109.

普尔柯沃大型中星仪的規格如下：物鏡的直徑为 146 公厘，焦距为 270 公分，水平軸長为 119 公分。

用中星仪代替子午环来測定絕对赤經，可以大大地提高观測精度，因为此时观測者可以把精力集中于一个比較簡單的操作上，而不必分散精力在兩个不同类型的操作上，其中赤緯的測定本身就要求比观測子午經过更加集中精力。中星仪的結構比子午环較为簡單，因而所含各种偶然性的和系統性的仪器誤差也較少。为了确定春分点的位置，必須測定太陽的赤緯，在这种場合下是用垂直大圈仪来完成的；由于这些測定的精度很高，因而太陽的赤經以

及所有恒星的赤經都会更加精确。

由于恒星位置的絕对测定的組織工作如此良好；由于始終不渝地坚持了赤經表、赤緯表和以前的表彼此分开的原則；最后由于每一次都要独立地、極其精确地测定一切必需的归算常数，首先是蒙气差常数、岁差常数、章动常数和光行差常数的测定；由于这一些原因，普尔柯沃恒星位置表被公認为世界上最好的星表。

極其重要的是許多观测大約每隔二十年作一次有系統地复测，因此我們有历元为 1845.0、1865.0、1885.0、1905.0 和 1930.0 的恒星絕对位置表。在目前，这些星表在精度方面是無可倫比的范本，像我們在以后知道那样，它們是一切現代恒星位置的基本体系的基础。在編制一切基本星表时，普尔柯沃星表的权的确是最大的，它超过其他天文台的星表(例如格林尼治的，华盛頓的)好几倍(2 至 10 倍)。关于这一点將在 §67 中作詳細的敘述。

普尔柯沃天文台从它建立的时候起，就开始了坐标的絕对测定工作。头兩三年內完成了初步的試测工作。包含有 374 顆星的历元为 1845.0 的星表的观测工作，自 1842 年开始至 1849 年止；包含有 381 顆星的 1865 年的星表的观测工作，自 1863 年开始至 1871 年止；1885 年的星表(包含 402 顆星)自 1881 年开始至 1888 年止。在 1905 年的星表中含有 549 顆星，其观测工作于 1903 开始至 1906 年完成；在 1930 年的星表中含有 558 顆星，其观测工作于 1932 年結束。但自 1938 年起，开始新的观测列的观测；綱要中包含有 962 顆星。就这样，綱要在不断地扩大。观测精度也显著地在提高。例如，开始时用子午仪观测恒星經过的單一观测的中誤差为 $\pm 0^s.040$；从 1861 年起使用記时器观测以后，观测的中誤差減小至 $\pm 0^s.025$；而自 1897 年起采用接触测微器以来，又減小到 $\pm 0^s.017$。

除上述的五对主要的星表(除 1865 年的星表外，赤緯表和赤

經表几乎每次都是單独地編制和付印的)外，尙有过渡星表，其中特別値得提出的有：1900年的星表(1126顆星)，1915年的星表(1642顆星与1631顆星的兩种)和1925年的星表(1334顆星)。

普尔柯沃天文台除了做絕对星表的工作外，尙进行了大量的坐标微差测定工作，这項工作是用該台的子午环进行的。普尔柯沃天文台的子午环的物鏡的直徑和焦距，大致与大型中星仪相同，而刻度盤的直徑几乎与該台的垂直大圈仪完全相同。

玆举出普尔柯沃天文台微差星表中的几个最大的恒星赤經表和赤緯表于下(兩个坐标幷列)：

1）历元为1855.0年的3742顆星的星表；观测开始于1840年止于1869年。基础星的坐标取自1845年和1865年的普尔柯沃絕对星表，幷取兩者的算术中数。

2）历元为1875.0年的5634顆星的星表；观测开始于1874年止于1880年。其体系与前一星表相同。

3）历元为1885.0年的6943顆星的星表；观测开始于1881年止于1894年；基础星的赤經取自阿烏維尔士基本星表(FKAG)，赤緯取自普尔柯沃絕对赤緯表。

4）历元为1900.0年的4301顆星的星表，观测开始于1896年止于1898年。

5）8820顆星的星表；观测开始于1899年止于1909年(历元为1860.0的Шьёллеруп星表的重新观测)。

6）历元为1910.0年的3396顆星的星表；自1909年开始观测；基础星的坐标取自新的阿烏維尔士基本星表(NFK)。

7）11324顆星的星表，观测开始于1928年止于1934年；星表提供星空攝影圖以基础星，其范圍由赤緯+45°至+60°。

8）历元为1935.0年的1334顆星的星表；观测开始于1934年止于1938年；基础星的坐标取自历元为1915.0年的1642顆星

及1631顆星的普尔柯沃綜合星表。該星表尙無單行本。

从这些根本不全面的普尔柯沃恒星位置微差表的举例中可以看出，这些星表中包含有一万个以上的星，它在恒星世界的天文研究事業上是一个偉大的貢献。

§67. 各种系統的基本星表与綜合星表

現在我們来較詳細地談談基本星表。为了編制这样的星表，必須完成巨大的、極其复杂的和严密的理論工作、科学研究工作以及計算工作，在此我們不能罗列此項工作的全部細节。但我們尽力地提供出一些关于这一工作的概念。

如果恒星沒有自行，如果观測仅包含有偶然誤差而沒有系統誤差的話，那末所选定的一系列恒星坐标的最或然値的决定問題之解算——編制基本星表的問題——就比較簡單了。要解决这一問題，只須在数量上选够最优良的、最精确的、同时又是最新的絕对星表就行。然后根据这些星表中几乎平常有的資料，計算其中每一星表所載坐标的中誤差，因此就每一整个星表或按單独星列計算它們的权，而且是分別就逐个坐标来計算。最后决定每一顆星的赤經赤緯的最或然値，此即由所有选定的星表中取每一顆星的赤經赤緯的权中数。

不用說，在取这些中数之前，所有的星表必須归算至同一坐标系的位置，簡單地說，就是归算至同一分点。为此，对每一星表都必須計算由該星表的分点到为編制星表而选定的分点的几年来的岁差。因而在編制基本星表时，必須确定岁差常数的最或然値。

但是，尽管我們假設观測中沒有系統誤差，尽管所有的星表都归算至同一分点，而在不同的星表中选取的同一恒星的坐标間仍然是有系統差的，这是因为計算这些原始星表时采用了各种不同的归化常数。因此，在編制基本星表时，除了已經确定的岁差常数

的最或然値外，还必須确定其余归化常数的最或然値。这里包括蒙气差常数、光行差常数和章动常数。在归化常数的最或然値的整个系統确定以后，在所选的全部星表中还应加入这样的改正数，使其所載的恒星坐标化算至这一共同系統，以便消除系統差，这种差是随各星表常数値系統的不同为轉移的。

若在某些原始星表的整理过程中未对天文台的緯度加入極移改正，則在此仍須顧及这种改正。

我們再来看一看，上述兩种假設与实际情况符合的程度如何呢。为此，在所有星表归算至同一分点和同一常数系統以后，必須將它們与其中被認为是最好的偶然誤差是最小的星表进行比較，这就是說，就每一顆星的每一个坐标求出每一个星表 K_i 与所选定的星表 K_0 的表差 $K_i—K_0$，即每一星表和星表 K_0 的共有星的坐标差数：

$$\Delta\alpha=\alpha_i-\alpha_0,\qquad \Delta\delta=\delta_i-\delta_0; \tag{a}$$

式中 i 为星表的編号，在这一研究中星表 K_0 叫做基础星表。求得这些差数之后，立即可以看出：这些差数的絕对値是很大的，它大到不能單从星表的偶然誤差来說明。这个原因显然在于我們的兩个假設是不正确的，因为恒星具有自行，观測含有系統誤差，这些系統誤差只能部分地計算出来，或适当的組織观测来消除。这些未計算出的或未消除的系統誤差，其根源是不知道的，而且星表之間存在系統差的因素，往往是当兩个星表的观測历元一致或極其靠近时，即恒星自行的影响等于零或很难察觉的时候便表現得特别明显。

兩个星表的系統差，乃是此二星表所載恒星坐标 α 及 δ 之差的平均値，这些平均値是随着恒星坐标的变化而規律地变化着的。它們常称为星表的系統誤差，这当然不完全正确。兩个星表的系統差等于該兩星表的系統誤差之差；最正确的是称它們为某星表

对另一星表的相对系統誤差。

这样，編制基本星表的問題更加复杂化了。我們不仅应該确定在基本星表历元时恒星坐标 α 和 δ 的最或然値，而且还要确定它們的周年自行 μ_{α} 和 μ_{δ} 的最或然値。如果不这样做，或者恒星自行确定得不够精确，則基本星表的坐标对該表的历元来說虽然是很精确的，但对任何其他历元来說是不精确的，这种星表在实际工作中也是不能应用的。此外，要把观测历元不同的一切选定的原始星表化算至基本星表的历元，必須知道恒星自行，因为只有在此时才能研究星表的系統差。但为了精确地确定恒星自行，必須有已消除偶然誤差和系統誤差的恒星的各种历元时的坐标。因此，求沒有偶然誤差和系統誤差的恒星的坐标和自行的这个問題，严格說来，是無法解决的。这一問題只有借助于逐漸趋近法才能解决。

在实踐中，通常采用兩种方法来構成基本的或常称为标准的恒星位置系統。現較詳細地来闡明其中的第一种方法。

首先确定这些預定包含在所編基本星表內的恒星的近似自行。为了这一目的，选取兩个絕对星表 K_1 和 K_2，其观测历元 t_1 和 t_2 尽可能相距远一些。加上岁差將其化至同一分点，求出由此兩个表中所选出的每个星的坐标差 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$，并除以此二星表历元之差。此可写为：

$$\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1,\quad \Delta\delta=\delta_2-\delta_1;$$

其次

$$\mu_{\alpha}=\frac{\Delta\alpha}{t_2-t_1},\quad \mu_{\delta}=\frac{\Delta\delta}{t_2-t_1}.$$

利用这些恒星的周年自行的近似値以及已确定了的岁差常数，將所有选定的星表归算至同一历元和同一分点，同时所选定的絕对星表，其历元应均匀地分布在几十年左右（有时在一百年以上）的長时間段內。

然后，根据本节公式(a)組成每个星表 K_i 与基础星表 K_0 的坐标差，并确定和研究每一个星表的系統差。

因为系統差依恒星的坐标为轉移，故对星空某一区域內的一切恒星而論，它將是某一确定的量，并随恒星的赤經与赤緯的变化而規律地变化。每一坐标之差可由兩个被加数之和表出，其中一个被加数只随赤緯而变，而另一个仅随赤經而变，即

$$\Delta\alpha=\Delta\alpha_\alpha+\Delta\alpha_\delta,\quad \Delta\delta=\Delta\delta_\alpha+\Delta\delta_\delta. \qquad (6)$$

$\Delta\alpha_\alpha$ 叫做“α 的 $\Delta\alpha$”，$\Delta\alpha_\delta$ 叫做“δ 的 $\Delta\alpha$”，$\Delta\delta_\alpha$ 叫做“α 的 $\Delta\delta$”，$\Delta\delta_\delta$ 叫做“δ 的 $\Delta\delta$”。这些系統誤差中的每一个差的决定都是分别进行的，并先决定数值最大的那一个，即 $\Delta\alpha_\delta$ 或 $\Delta\delta_\delta$。例如，决定 $\Delta\delta_\delta$，按照赤緯每隔 5° 或 10° 構成各帶，在每一帶內組成 $\Delta\delta$ 的平均值。將这些平均值描于圖上，在橫坐标軸上标出赤緯，在縱坐标軸上标出相应于这些赤緯之差的平均值。然后进行圖上整理，即依所繪的各点作一曲綫。$\Delta\delta_\delta$ 的这种曲綫如圖 110 所示，在縱坐标軸上截取 $\Delta\delta_\delta$ 等于 0″.01。

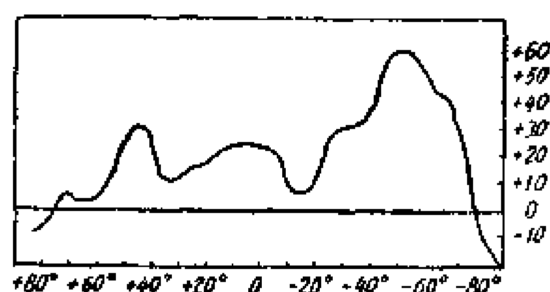


圖　110.

就整数赤緯自此曲綫取这些差数之值，并根据这些数值編成相应的系統差表。根据这种表，从所有 $\Delta\delta$ 中減去用上法所求得的系統差 $\Delta\delta_\delta$，即得：

$$\Delta\delta'=\Delta\delta-\Delta\delta_\delta.$$

余下的系統差用同样的方法計算，只是它們是按赤經的整小时組成平均值的，再將其描于圖上，进行圖上整理，然后編成系統差 $\Delta\delta_\alpha$ 表。

系統差 $\Delta\alpha_\delta$ 和 $\Delta\alpha_\alpha$ 的决定也完全相同。

除了与恒星的坐标有关的系統差之外，还有与恒星的亮度即星等有关的系統差。但在測定赤緯时，这种差异是極其微小的。

这是因为亮星在望远鏡視野中經过蛛絲往往比暗星約早观測到 $0^s.05$，而有时要早 $0^s.1$；同时用蛛絲照准星的誤差几乎与星的亮度無关。所以，只在研究赤經表的系統差时，才研究这种系統差。与星等有关的兩个星表的系統差以 $\Delta\alpha_m$ 表示，因此，(б) 式应改写为：

$$\Delta\alpha=\Delta\alpha_\alpha+\Delta\alpha_\delta+\Delta\alpha_m,\quad \Delta\delta=\Delta\delta_\alpha+\Delta\delta_\delta. \tag{в}$$

系統差 $\Delta\alpha_m$ 的决定与其他类型的系統差相同，此时只是將各星按星等集合成組而已。系統差 $\Delta\alpha_m$ 通常以下列方程表示：

$$\Delta\alpha_m=a_0+a(m-m_0), \tag{г}$$

式中 a_0 和 a 为数字系数，它們根据星表的比較得出；m_0 为在 $\Delta\alpha_m=a_0$ 时的星等，m 为給定星的星等。

方程(г)称为亮度差。在近代星表中，亮度差一般是很小的。

显然，所求得的一切选定的星表的系統差是每一星表与基础星表的相对系統誤差。

現在我們可以將各星表归算至基础星表 K_0 的系統。为此，我們將所求得的系統差反其符号視为各星表的改正数，按其所屬將这些改正数加入每一星表的恆星坐标內。今再將所求得的、已加修正的每一星表的坐标値与基础星表中的坐标値組成差数：

$$\Delta\alpha_i'=\alpha_0-\alpha_i',\quad \Delta\delta_i'=\delta_0-\delta_i';$$

式中 α_i' 及 δ_i' 为取自 i 号星表的修正坐标。

$\Delta\alpha_i'$ 和 $\Delta\delta_i'$（因为星表已归算至 K_0 的系統）只与取自星表的坐标的偶然誤差以及所采用的周年自行的偶然誤差有关。

因而，对每一星表及每一顆星而言，系統差可用下列誤差方程表示：

$$\Delta\alpha_i'=\Delta\alpha_0+\Delta\mu_{\alpha_0}(t_i-t_0) \tag{д}$$

$$\Delta\delta_i'=\Delta\delta_0+\Delta\mu_{\delta_0}(t_i-t_0),$$

式中 $\Delta\alpha_0$ 和 $\Delta\delta_0$ 为星表 K_0 的坐标改正数，$\Delta\alpha_{\mu_0}$ 和 $\Delta\mu_{\delta_0}$ 为周年自行的改正数，t_i 和 t_0 各为 K_i 和 K_0 的观測历元。

这些每一顆星和每一坐标的方程組，按最小二乘法解算，求得基础星表的自行和位置的改正数，这些改正数是由綜合全部选定的星表中求得的。在解这些方程后，还应求出相应于星表在偶然誤差方面的权，也就是依中誤差而定的权。

我們利用这些改正数修正星表 K_0 中的一切恆星的坐标和自行，求得恆星的改正坐标和自行，毫無疑問，它們的偶然誤差是很小的。但因这样的修正只能减小偶然誤差，而星表 K_0 的系統誤差依然未变，故上述的整个过程称为 K_0 系統的內部修正。

內部修正完畢后，必須轉向系統本身的修正，即决定修正过的基础星表 K_0 的系統誤差，并在系統誤差方面修正它。

为了这一目的，首先要組成每个星表中的坐标与內部修正过的基础星表之差，并用上述的方法决定四种(或五种)同样形式的系統差。基础星表的系統修正是分别按这些差的每种形式單独地进行。若構成这些差的曲綫，类似圖 110 所示的每个星表的 $\Delta\delta_\delta$ 曲綫，則一般不难看出，这些曲綫中的全部或大部分都有其相似的地方。其原因是基础星表 K_0 的各种形式的系統誤差的因素是全部包含在这样的差数中的，并且它对所选定的全部星表都是一样的。这一理由使我們能够对每一个星表或每一帶提供每个这样的差数方程：

$$(\Delta\delta_\delta)_i=(\Delta\delta_\delta)_0+(\Delta\mu_\delta)_\delta(t_i-t_0), \tag{e}$$

式中 $(\Delta\delta_\delta)_0$ 是星表 K_0 在这一帶內的恒星的赤緯系統誤差，它依赤緯而变；而 $(\Delta\mu_\delta)_\delta$ 是該星表的这一帶的恒星在赤緯方面的周年自行的系統誤差，它也是依赤緯而变；其他符号的意义与其在前述的情况中相同。按最小二乘法解算每一帶的这种方程組，求出所有各帶这兩种系統誤差 $(\Delta\delta_\delta)_0$ 和 $(\Delta\mu_\delta)_\delta$ 的最或然値；然后按

各帶作每一个系統差的圖上平差。

下列系統差也用同样方法进行确定和平差：

$$\Delta\alpha_{\alpha}, \Delta\alpha_{\delta}, \Delta\delta_{\alpha}, (\Delta\mu_{\alpha})_{\alpha}, (\Delta\mu_{\alpha})_{\delta}, (\Delta\mu_{\delta})_{\alpha}.$$

把这些系統差反其符号視为基础星表 K_0 的各星的位置及自行的系統改正，根据所画曲綫編制該星表的系統改正表。若把所有这些改正数加入星表 K_0 的各星的坐标及自行内，則可根据綜合原始星表所提供的全部資料求得基本的或标准的恆星位置和自行系統。

但編成这种基本星表后，工作通常是沒有結束。这一工作还要进行几十年，可以这样說，还要借几輩的天文学者去进行。往后的工作可使星表日新月异，更加完善，更加精确；重新进行系統内部的修正，然后进行系統的修正，每隔若干年用更新的和更精确的資料从新重复全部工作。同时包括在星表中的恆星的数目不断增加，这不仅使系統逐步改进，而且使其不断地增大。

第二种構成恆星位置的基本系統的方法与第一种方法的差別，主要在于开始阶段的不同。第二种方法中所选取的恆星数目不多（数十顆），載有所选的全部恆星的最佳絕对星表的数目也不多。同时由于所选的恆星是經常观測的，故可假定在所有的星表中所載的这些恆星的位置的偶然誤差是很小的。为了进行第一次趋近，乃假定所选的星表中的一个星表作为基础星表，自此星表內查出这些恆星坐标的任何数值。周年自行的近似值可按上面所述的根据任意兩个星表决定之。

若以 α_0 和 δ_0 表示任一恆星取自历元为 t_0 的星表 K_0 中的坐标，而以 α_i 和 δ_i 表示該星取自历元为 t_i 的星表 K_i 中的坐标，則我們可以首先計算其差数：

$$\Delta\alpha_i=(\alpha_0)_i-\alpha_i;\ \Delta\delta_i=(\delta_0)_i-\delta_i;$$

式中 $(\alpha_0)_i$ 和 $(\delta_0)_i$ 为取自星表 K_0 的恆星的坐标，但已經加了岁差

和近似自行改正化算至星表 K_i 的历元 t_i 的。我們可用下列方程表示这种差数：

$$\Delta\alpha_i=\Delta\alpha_0+\Delta\mu_{\alpha 0}(t_i-t_0),$$
$$\Delta\delta_i=\Delta\delta_0+\Delta\mu_{\delta 0}(t_i-t_0). \qquad (ж)$$

就所选定的星所組成的这种方程組解算之，并根据全部所选用的星表就每一顆星及每一坐标求出恒星的近似位置及自行的改正数的最或然值：

$$\Delta\alpha_0,\ \Delta\delta_0,\ \Delta\mu_{\alpha 0},\ \Delta\mu_{\delta 0}.$$

在解算这些方程組时，每一方程都要附以相应于星表在系統誤差方面的权，即需附以根据該星表消除系統誤差的程度而考慮的权。將求得的改正数加入所选定的星的坐标和自行內：即按公式：

$$\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha_0, \qquad \mu_\alpha=\mu_{\alpha 0}+\Delta\mu_{\alpha 0};$$
$$\delta=\delta_0+\Delta\delta_0, \qquad \mu_\delta=\mu_{\delta 0}+\Delta\mu_{\delta 0}.$$

求得第一次趋近的基本系統或标准系統，因此对于它的構成不必求星表的系統差。

在修正(特别是在扩大)所求得的第一次趋近的标准系統方面的下一步工作，用我們已知的系統的內部修正和系統修正的方法进行，并引用更多的新的原始星表(这一点应特别注意，因为这一系統的恆星数是很少的)。

在目前有兩种不同的互不依賴的基本系統，它們几乎是同在八十年前左右开始編制的。

第一个系統，也就是天文协会的基本系統。它是由天文研究所(柏林)最初在阿維尔士、繼之在別捷尔斯、最后在柯尔夫的領导和直接参加下，按上述的第一种方法編制的。

天文协会的第一个基本星表是阿維尔士編制的，历元为1875.0，出版于1879年，其簡写为FCAG。它包含有539顆恆星。在編制这一星表时，选用了1865年的普尔柯沃絕对星表作为基

础星表，同时应用了具有最大权的 1845 年普尔柯沃絕对星表和增补的 1871 年普尔柯沃絕对星表。FCAG 星表的南天延續部分很快(1889 年)就出現了。

天文协会的第二个基本星表定名为"新基本星表"(簡称 NFK)，它是由别捷尔斯根据阿維尔士及其同事們的研究編成的，这个星表的历元为 1900.0 年，于 1907 年出版，共包含有 925 顆恒星。在决定为計算 NFK 星表所必需的对于 FCAG 星表的改正数时，又采用了一切当时所有的幷具有最大权数的普尔柯沃絕对星表。

最后，在 1937 年和 1938 年，天文协会的"第三个星表"(簡称 FK3)出版了，它是在柯尔夫的領导下編成的。它由兩部分組成。在第一部分(1937 年)內載有第二个星表(NFK)中的 873 顆恒星的自行和坐标；在第二部分(1938 年)內載有增补的 662 顆恒星的自行和坐标，其历元为 1950.0；在兩部分內共有恒星 1535 顆。在修正 NFK 星表时，卽計算改正数將其化至 FK3 星表系統和計算增补星的自行和坐标时，又采用了大量的具有最大权的普尔柯沃絕对星表，起自"1845 年普尔柯沃"星表，止于現代星表，其中主要的是 1915 年和 1925 年的星表。

按国际天文协会的决議，所有的天文年历一律采用 FK3 基本星表来編制。其中，"苏联天文年历"自 1942 年开始就是根据这个基本星表編制的。FK3 星表同时采用于苏联的一切天文大地工作中。

現代基本系統中的第二个系統，是由美国的好几代天文学家用上述的第二种方法編制的。这一工作是經过了几个最初阶段的(它約与第一系統同一年代开始編制的)，我們仅仅談一下出現于 1910 年的刘易士鮑斯的"初步总星表"(簡称为 PGC)，历元为1900 年，它包含有 6118 顆星；編制此表时，采用了 80 个星表，其中有許

多的普尔柯沃星表。这个星表中的星，大約只有一半左右可視为基本星，其余各星的坐标和自行都是以較少的观測为基础的。

刘易士鲍斯的兒子白沙曼鲍斯繼承了他的工作，白沙曼在1937年出版了历元为1950.0的"总星表"（簡称GC），其中包含有33342顆星，并以220个以上的星表作为基础。对刘易士鲍斯星表（PGC）所作的評論在很大的程度上可应用于白沙曼鲍斯星表（GC）。而且必須指出：編制天文协会的基本星表的目的在于要載出尽可能最精确的恒星位置和自行，那怕星数少一点也行；而刘易士和白沙曼所抱的目的是載出具有适当精度的尽可能多的恒星的位置和自行，以便尽量消除系統誤差。当編制这兩个星表时，在其各阶段的工作上，从最初起到白沙曼的GC表止，都采用了具有極大权数的普尔柯沃天文台的星表。例如，白沙曼鲍斯給普尔柯沃星表的权为10，而給其他天文台的星表的权为1，在極少数的情况下給以3和5。

在对各种基本星表作比較研究时，仍用比較原始星表的方法来进行比較。首先計算这兩个星表所共有的自行和坐标差。然后用以前所述的方法求出兩个星的系統差：

$\Delta\alpha_\alpha, \Delta\alpha_\delta, \Delta\delta_\alpha, \Delta\delta_\delta, (\Delta\mu_\alpha)_\alpha, (\Delta\mu_\alpha)_\delta, (\Delta\mu_\delta)_\alpha, (\Delta\mu_\delta)_\delta$,

如果必要的話，再求出$\Delta\alpha_m$形式的系統差。根据这样的比較所編制的任何兩个基本星表的系統差表，不仅單純地在理論上有用，而且有时在实踐方面也是很有用的。实际上，有时必須求得許多恒星的坐标和自行，这些星，例如在白沙曼鲍斯的总星表中有，而在FK3星表中沒有，但要的正是在FK3基本星表系統中的这些星。此时，坐标和自行应取自第一星表，即GC星表，并加上"FK3—GC"的系統差；計算时，根据系統差表分別就这些星的每一坐标进行。茲引用这兩个星表的系統差表作为例子，这个表是就北半球及1900年而編的。

現在我們来談綜合星表。如果編制基本星表的目的，如上所述的是在确定某些星的坐标的最或然值，那末編制綜合星表的目的就在于求得許多恒星的經过修正并且是尽可能精确的坐标值，这些坐标值比其在單个的原始星表中的数值精密些，也就是要求得在某种程度上消除了偶然誤差和系統誤差的坐标值。同时，在編制每一个綜合星表时，几乎都要顧及到滿足某一定的迫切的实际要求。在此常常有这种情况，对于編制适当的基本星表还沒有足够的資料，而任务要求很迫切，因而只好編制一个概略的基本星表。

一般，在編制綜合星表时所采用的方法，与編制基本星表所用的方法相同，关于这些方法在上面已論述过，不过在此仅仅稍微簡化了一些。

第一，所选的星表数通常是不多的，約为 3 个到 10 个。第二，不仅采用絕对星表，并且采用微差星表。恒星自行不加确定和修正，而大部分取自任一基本星表。自所选的星表中再选擇一个或任选一作为綜合星表的基础星表。然后，按上述的程序，先进行系統的內部修正，后进行系統修正。这兒，如上所述，不进行自行的修正，同时也不可能进行，因为在此种場合中，星表历元通常是一致的或彼此很接近的。所以，不需要組成(д)、(е)或(ж)等形式的方程，也用不着按最小二乘法来解算。坐标的最后修正值是一个簡單算术中数或簡單算术权中数。

單一星表的权，在此通常是根据星表所載坐标的中誤差計算的。

現在我們列举一些关于苏联近二十年来在普尔柯沃天文台的領导下及其直接参加下所編制的綜合星表。

(1) 历元为 1915.0 的 1631 顆星的基本赤緯綜合星表（天文研究所，列宁格勒，1934 年出版）。

系統差表

FK3—GC(簡称)

I

δ	$\Delta\alpha_\delta$ 計至 $0^s.001$	$(\Delta\mu\alpha)_\delta$ 計至 $0^s.00001$	$\Delta\delta_\delta$ 計至 $0''.01$	$(\Delta\mu\delta)_\delta$ 計至 $0''.0001$
+90°	0	0	+3	− 5
87	0	0	+4	− 7
86	−22	− 14	+3	− 6
84	−39	− 19	+2	− 2
82	−51	− 43	+3	+ 1
80	−41	− 82	+3	+ 4
78	−30	−116	+4	+ 6
76	−30	−108	+9	+10
74	−24	− 98	+7	+20
72	−18	− 82	+7	+18
70	−15	− 64	+5	+12
65	−13	− 64	+8	+ 4
60	−14	− 60	+7	+ 8
55	−16	− 38	+6	+16
50	− 9	− 18	+2	+34
45	− 8	− 14	+2	+30
40	− 9	− 16	+5	+20
35	− 9	− 22	+5	+26
30	− 9	− 14	+6	+20
25	− 9	− 12	+3	+26
20	− 9	− 10	+3	+32
15	− 9	− 10	+3	+36
10	− 9	− 7	+5	+30
+ 5	− 9	− 5	+6	+24
0°	− 8	− 4	+7	+16

本星表是根据下面十个星表編制的：1915年的普尔柯沃主要星表，1915年的普尔柯沃补充星表，1925年的格林尼治星表，1925年的巴别立斯别尔格星表，1925年的巴黎星表，1910年的华盛頓星表，1925年的阿尔及尔星表，1900年的卡尔星表和1925年的卡

II

α	$\Delta\alpha_\alpha$ 計至 $0^s.001$	$(\Delta\mu_\alpha)_\alpha$ 計至 $0^s.00001$	$\Delta\delta_\alpha$ 計至 $0''.01$	$(\Delta\mu_\delta)_\alpha$ 計至 $0''.0001$
0^h	+11	+22	−4	+ 6
1	+ 8	+18	−6	− 2
2	+ 6	+ 8	−7	− 5
3	+ 2	0	−6	−10
4	− 3	− 2	−5	−10
5	− 9	− 5	−6	−10
6	−11	−10	−7	−12
7	−11	−18	−6	−18
8	−11	−20	−2	−20
9	− 9	−14	−2	−20
10	− 7	− 6	+1	−19
11	− 6	0	+3	−15
12	− 5	+ 2	+5	− 4
13	− 3	+ 2	+6	+ 2
14	− 4	+ 6	+6	+12
15	− 5	+ 7	+7	+20
16	− 4	+ 7	+7	+22
17	0	0	+6	+18
18	+ 5	− 6	+5	+12
19	+ 8	− 4	+4	+10
20	+12	− 3	+2	+ 8
21	+14	− 1	+1	+ 6
22	+14	+ 6	−1	+ 9
23	+13	+16	−2	+10
24^h	+11	+22	−4	+ 6

尔星表。选取两个没有公共星的 1915 年普尔柯沃主要星表和补充星表作为基础星表。自行取自刘易士鮑斯的初步总星表(PGC)。編制这一星表的目的，是要初步完成編制特种基本星表的国际工作，这种基本星表也是为了所謂天圖进行攝影观測所需的另一种内容很丰富的基础星星表服务的

(2) 历元为 1930.0 的,按太尔各特法測的 1967 顆星的星表,

它附有視位置化算用的归算数(天文研究所,列宁格勒,1933年出版)。

本星表載有精度达0″.01的赤緯,及精度达0ˢ.1的赤經。它是以在(1)款所述的赤緯綜合星表的方式編成的,并利用了历元为1925.0的1334顆星的普尔柯沃星表。这一星表現在由于其第二版的問世而丧失其作用,关于这一点將在§69和§70中闡述。

編制这种星表的目的,在于以尽可能精确的恒星赤緯来保証苏联天文大地測量的进行,这些星是按太尔各特法測緯度所必需的。

(3) 历元为1925.0的1642顆主星及127顆星的基本星表("普尔柯沃总天文台論文集"1935年出版)。

此一綜合星表中載有1769顆恒星的赤經。它是根据普尔柯沃、尼古拉耶夫、格林尼治、巴黎、华盛頓、阿尔及尔和烏克里等天文台的星表編成的,其中大部分星表已在第一款提到过。此等星表中的每一个星表,化算至同一分点后,要加上星表中的全部恒星所共有的分点改正数。然后由五个星表(巴黎星表和烏克里星表除外)構成赤經的平均系統,并用它作为基础,而用我們所熟悉的方法进行修正。自行取自刘易士鮑斯的"初步总星表"(PGC),而对于PGC星表中沒有的少数恒星的自行,則取自1925年的格林尼治星表。

編制此星表的目的与在第(1)款所述的相同。

(4) "赤緯由$-10°$到$+90°$的2957顆星的星表"("普尔柯沃总天文台論文集",列宁格勒,1948年出版)。

本星表簡称为"大地恒星表",它由三个已用岁差和自行归算成历元为1950.0的綜合星表組成。首先根据普尔柯沃、莫斯科、高加索、尼古拉耶夫和塔什干五个天文台的共同的工作成果,編成历元为1935.0的1334顆大地恒星綜合星表。这些天文台曾編制

了四个互不依賴的 1334 顆星的原始赤緯星表和原始赤經星表(高加索天文台沒有观測赤經,而塔什干天文台沒有观測赤緯)。这些原始星表的观测,是根据 1934 年到 1939 年的 1631 顆星和 1642 顆星的綜合星表(見(1)和(3)兩款),用微差法进行的。1334 顆星的綜合星表,就是根据这些原始星表,再加上历元为 1925.0 的普尔柯沃的絕对赤緯星表和絕对赤經星表編成的。这个綜合星表的精度与1631顆星和1642顆星的綜合星表的精度相同,在后的兩个綜合星表的系統中引用了五个苏联天文台的原始微差星表的合作观測,所以由这兩个綜合星表中可以分出 1623 个公有星。因此,这三个星表的全部恒星的坐标归算至历元 1950.0 后,就編成了 2957 顆星(1334+1623) 的綜合星表,此星表包含有赤緯由 $-10°$ 到 $+90°$ 的北天全部恒星。星等到六等止,这样就完全保証了苏联天文大地工作的需要。保証苏联天文大地工作的需要乃是編制 2957 顆星的星表的基本目的 这一綜合星表在 §69 和 §70 中还要論及。在这里我們仅指出:在 2957 顆星的星表中,对每一顆星都分别載有將其坐标化算为 FK3 基本星表系統和 GC 基本星表系統用的改正数。大地恒星星表的自行取自白沙曼鮑斯的"总星表"(GC)。

§68. "苏联天文年历"中的恒星表·恒星的平位置和視位置·按"苏联天文年历"計算恒星的視坐标

我們知道,天文測量員在計算时需要知道的,是恒星或太陽在观測瞬間的視坐标,而不是它們的平坐标或真坐标。視坐标的計算可按第六章內所推出的公式进行,但这样要耗費天文測量員許多的时間和劳力。

若我們利用当年的"苏联天文年历",則天体視坐标的計算就非常簡便了。在天文年历中,正象我們所知道的那样,載有太陽的

赤道坐标，即太陽視面中心的地心視赤經和地心視赤緯。根据第五章所述，太陽的坐标是化算至地心的，且已加了周年光行差影响的改正。§64 所述的太陽观測的整理程序的规定就是由此而来的。这些太陽坐标在"苏联天文年历"中，是以格林尼治平子正即世界时 0^h 为准而逐日載出的（参閱"1953 年的苏联天文年历" 第 6—26 頁），因此，我們很容易按在第四章 §40 所导出的公式，就任意瞬間进行内插。

其次，在每年的"年历"中，都有一个星表，刊載大量的恒星平坐标。这个表的历元为各年的岁首。苏联的"年历"虽然开始刊行于1922 年，但仅于 1923 年才刊載平位置表。

苏联的"年历"中的平位置表，是根据基本星表中的一种而編制的。如果所选恒星中的某些恒星不包括在該基本星表内，則这些星的坐标由另一基本星表选出，并用系統改正將其归算至第一种星表的系統。

因此，"年历"中的平位置表可以看作是一种特殊型式的綜合星表；这种星表虽然按一个基本星表的系統刊載，但它总是根据兩种基本星表編成的。此外，所选恒星的平坐标每年都按历元即次年的岁首重新計算，此即岁差及自行的計算。关于这一点將在 §69 中予以詳細的叙述。

在 1923 年的"年历"中，有 519 顆星的平坐标是屬于鮑斯总星表(PGC)系統的，并附有归算为新基本星表(NFK)系統的改正数。从 1923 年起，"苏联年历" 中的恒星平位置表不断得到改善和扩大，恒星的数目很快地增到 615 顆。

兹較詳細地叙述一下 "1953 年的苏联天文年历" 中的平位置表。表中載有屬于 FK3 系統的历元为 1953 年的 756 顆星的平赤經 α 和平赤緯 δ。苏联"年历"自 1942 起就改屬 FK3 系統，当时該年历第一次載了 633 顆星的坐标。

在1942年以前，所載的是屬于PGC系統的坐标，并为了改算为其他基本星表系統而附有改正数。在1952年，該表的星数又增加120顆，其中有南天的星119顆拱極星一顆。

表的标題为"1953年的恒星平位置"（参閱"1953年的苏联天文年历"第134—148頁）。象通常在一般星表內一样，各星按其赤經的增加次序排列。赤緯大于+80°的恒星，即所謂的拱極星，为数47顆，專載于148頁，其次序也按赤經的增加而排列。这些星的視位置变化較快。

表內的756顆星中有109顆在FK3星表中是沒有的，它們的平坐标是根据鮑斯总星表GC算出的，并加入了FK3—GC的系統改正，这种改正是根据这兩个星表的比較而得出的。

"1953年的苏联天文年历"中的星表的結構如下：

第一欄——星的編号。在此应注意，在1952年新添了119顆星后，对以前列入星表的586顆星的編号仍然保留。由于这些新編入表內的恒星按其赤經的增加次序錯杂地排列在原有恒星之間，所以它們的号碼由587至706便夾杂在原有的編号中間。环極星($\delta>80°$)(148頁)另有特别編号(№1—47)，并且为了有所区别，在其編号前注一字母N(Nord)。

第二欄——星名。星名或用字母及星座的拉丁名称表示，或用数字及星座的拉丁名称表示，或用編号及第一次記載此星的原始星表的簡称表示。

第三欄——星等。載至百分之一。

第四欄——按加尔华德斯卡法分类的光譜类型。

第五欄——1953年岁首的平赤經。以时、分、秒表示，記載至千分之一秒。

第六欄——赤經的周年变化，即赤經的周年岁差和其周年自行之和。以时秒表示，記載至$0^s.001$。

第七欄——赤經的自行 μ_α，記載至万分之一时秒 ($0^s.0001$)。

第八欄——1953 年岁首的平赤緯。以度、分、秒表示，記載至百分之一秒。

第九欄——赤緯的周年变化，即赤緯的周年岁差和其周年自行之和，記載至百分之一秒。

第十欄——赤緯的自行 μ_δ，記載至千分之一度秒 ($0''.001$)。

有关拱極星（148 頁）的記載也是这样，仅赤經及其周年变化，記載至百分之一时秒，而不是千分之一时秒；赤經周年自行 μ_α，記載至千分之一时秒，而不是万分之一时秒。

最后，对天文測量員来說，最重要的也是最可貴的是"苏联天文年历"中所載的 646 顆恒星的視坐标，其中有 37 顆拱極星。事实上，这是"年历"中最重要的和篇幅最多的一个部分，它一共占了約二百三十頁，即为全部篇幅的一半以上（不計"年历"的說明）。在 1953 年的年历中，这一部分就叫做"1953 年的恒星視位置表"，它載于 149—377 頁内。在野外測定天文点所需要的一切恒星，自 1952 年起在年历中都載有其視位置。至于測定天文点的方法，在苏联天文大地測量中所采用的，是最常用的經典方法和苏联本国的方法（如金格尔法和别夫卓夫法）。苏联的"年历"載有任何外国年历所沒有的 67 顆恒星視坐标，也根本沒有一本外国天文年历包含有这样多的恒星的視坐标，因此，苏联的"年历"对于在苏联进行天文大地測量工作是最适合的。

所有这些都是"苏联天文年历"优于外国年历的地方。

为了能够一看就明了，那些星載有其視位置，那些星沒有載出其視位置，乃于平位置表中，在沒有載出其視位置的恒星的名称上加以括号。

列在各欄的 609 顆恒星（149—301），也是按其赤經的增加次序排列的，編号和在平位置表中的一样，所載的視赤經和視赤緯是

以格林尼治上中天为准的，每隔十天，更正确的説，每隔十次中天一載。

观測瞬間的恒星視坐标，一般是根据視位置表用簡易內插法求得。同时，通常按整日进行內插就足够的了。在需要較高的精度的情况下，必須顧及观測瞬間（至 $0^{h}.1$），并把它預先化算为格林尼治子午圈恒星时，同时还要記住表中所載的坐标是以上中天为准的（$s=\alpha$）。为了避免在計算內插間距中的錯誤，最好用圖解法檢查一下自己的計算。为此，按适当的比例將自某一表列日期到另一表列日期的十天排列在任意的直綫上，并在此圖上标示出兩个表列瞬間和一个預先化算为格林尼治子午圈时的已知瞬間。为了便于內插，在視位置表內还載有表差（在兩表列値的中間）。

必須注意，在一年中每顆星都有这样的一天，他在 24 小时中有兩次上中天。这只有恒星在一天的开始不久中天才能發生，更正确的説，它在一天开始后的 $3^{m}56^{s}.56$ 以前中天，那时它才来得及在同一天終了前再次中天。这一天叫做临界日，但这是不十分恰当的說法。在"年历"中，每一顆星的临界日几乎都是載于該星視坐标所在的那一欄的下面（倒数第三列）。若已知瞬間与临界日期在同一表間隔內，則在决定內插間距时应当十分注意，为了避免在确定上的錯誤，一定要采用圖解法。

在要求特别精度的情况下（这是比較稀少的），即在內插时要求保証精确到千分之一时秒的时候，对于內插必須采用二次差（参閱 § 38）。

在这种同样的場合中，一定要顧及到表中所載的視坐标沒有包含的短周期章动項；因为这种章动項的周期很短促，对它們进行內插，特别是用簡易內插法是不容許的。

对于 37 顆拱極星的視位置（304—377 頁）是逐日載出的，也是以格林尼治上中天为准的。在此求观測瞬間的坐标也是应用簡

易内插法，但必須估計到小时。当考慮內插間距时，在此特别建議采用圖解法，以便清楚地看出表列瞬間和观测瞬間（已化算为格林尼治地方时）对相应于民用日的开始那一瞬間的序列位置。

此外，必須指出，在"年历"中的視位置内不包含周日光行差。因周日光行差取决于观测地的緯度和观测瞬間的地方恒星时。因此，在需要特别精密的情况下，对于拱極星的周日光行差，必須按第五章§57所导出的公式單独計算；在該节内也列有适当的例子。

相反，短周期章动項已列入拱極星的視坐标内，因为在一日的范圍内进行内插对短周期章动項而言是完全可以的。

在表中每一拱極星的名称下面，都直接注出了兩次上中天和兩次下中天的日期。并就兩次上中天的日期，載出兩次上中天时的視坐标。

例

（1）試求1953年3月24日獅子座軒轅十二（"苏联天文年历"，№ 264）的視坐标。

由"1953年的苏联天文年历"（第214頁）中查得：

3月21日：$\alpha=10^h17^m25^s.955$　　$\delta=+20°4'37''.30$

-63；①　　$+74$. ①

三天内的改正数：　-0.019　　$+0.22$

3月24日：$\alpha=10^h17^m25^s.936$；　　$\delta=+20°4'37''.52$.

湊整后得：

$\alpha=10^h17^m25^s.94$；　　$\delta=+29°4'37''.5$.

2. 試求1953年4月14日莫斯科（$\lambda=2^h30^m7^s$），恒星时瞬間 $s=11^h43^m.9$ 小熊座勾陈一（北極星）的視坐标。

由"1953年的苏联天文年历"（308頁）中查得：

---

① -63和$+74$兩数，分别为当引数变化10天时α和δ的表差，以最后的小数位为單位。这些表差，也和α及δ一样从"年历"中（214頁）查得。

4 月 14 日: $\alpha=1^h49^m31^s.33$; $\delta=+89°2'49''.63$

$+26$① $-33$①

4 月 14 日: $s_0=13^h27^m$;

s	$11^h43^m.9$
$-\lambda_E$	$-2\ 30\ \ .7$
S	$9^h13^m.2$

已知瞬間(格)	$9^h13^m.2$
表列瞬間	$1\ 49\ \ .5$
内插間距	$7^h23^m.7$
(参閱圖 111)	$7^h.4$.

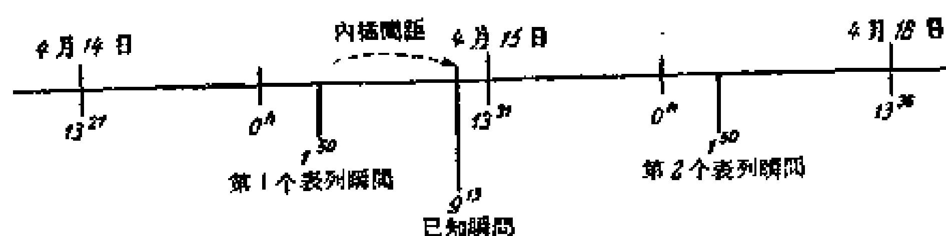


圖 111.

内插因子 $$n=\frac{7.4}{24}=0.308.$$

$$\Delta\alpha=+0^s.26\times n=+0^s.08,$$

$$\Delta\delta=-0''.33\times n=-0''.10.$$

在 4 月 14 日观測瞬間 $s=11^h43^m.9$ 的

$$\alpha=1^h49^m31^s.41;\qquad \delta=+89°2'49''.53.$$

但未計及周日光行差的影响。

(3) 試求 1953 年 5 月 24 日塔什干恒星时瞬間 $s=8^h20^m$ 巨蛇座 周 ("年历", №378)的視坐标。塔什干的經度 $\lambda=4^h37^m$E.

由"1953 年苏联的天文年历"(246 頁)中查得:

5 月 21 日

$\alpha=15^h44^m4^s.180$; $\delta=+15°33'48''.68$

$+68$ $+182$

为了确定内插間距,按 10 天作一圖,使其包括兩个鄰近的表列瞬間: 即前一个表列瞬間和后一个表列瞬間; 將已知瞬間化为格林尼治地方恒星时,幷把它連同上兩个

① $+26$ 和 -33 兩数为北極星的 α 和 δ 的表差,按視位置表(308 頁)直接算得。

表列瞬間描繪于圖上(如112圖)。

s	8^h20^m
$-\lambda_E$	$-4\ 37$
S	3^h43^m
已知瞬間(格)	$24^d3^h43^m$
表列瞬間	$20\ 15\ 44$
内插間距	$3^d11^h59^m$
	$3^d.5$
内插因子	0.35

由"1953年的苏联天文年历"(246頁)的視位置表中查得表差+68和+182，并將它們乘以0.35得：

$$\Delta\alpha=+0^s.068\times0.35=+0^s.024;\qquad \Delta\delta=+1''.82\times0.35=+0''.64.$$

將上述变量(即 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$)分别加入按第一表列瞬間(即5月20日)所査得的巨蛇座周的 α 和 δ 内，便可求得5月24日塔什干地方恒星时瞬間 $s=8^h20^m$ 該星的赤經和赤緯：

$$\alpha=15^h44^m4^s.204;\qquad \delta=+15°33'49''.32.$$

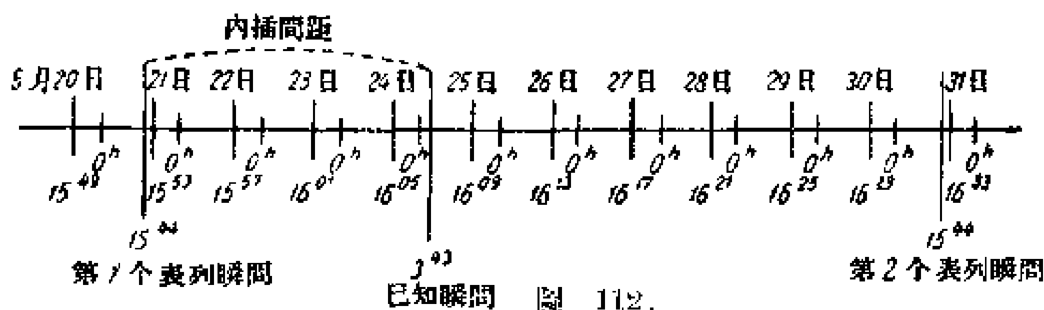


圖 112.

(4) 試用二次差进行内插(参閱§38)以求1953年2月24日塔什干恒星时瞬間 $s=8^h20^m$ 巨蛇座周("苏联年历"，№ 378)的視赤緯。

首先确定内插引数 n。为此，我們可作一圖，包括兩相鄰表列瞬間及位于此兩表列瞬間中間的已知瞬間。根据"1953年苏联的天文年历"(246頁)，我們得知此二表列瞬間为2月20日和3月2日。根据类似于圖112的圖进行試算：

s	8^h20^m
$-\lambda_E$	$-4\ 37$
S	3^h43
已知瞬間(格)	$24^d\ 3^h43^m$
表列瞬間	$20\ 15\ 44$
内插間距	$3^d11^h59^m$
	$3^d.4993$
内插引数 n	$0\ .34993$

現在我們来編制一个內插格式。同时由于一次差为已知，故只須就第一表列瞬間查出內插函数 δ：

	日　期	f	Δ'	Δ''	Δ'''
f_{-1}	2月10日				
			-111		
f_0	2月20日	$15°33'41''.61$		$+42$	
			-69	$(+44)$	$+4$
f_{+1}	3月 2日			$+46$	
			-23		
f_{+2}	3月12日				

按白塞尔內插公式(参閱§88)进行內插：

$$f(a+nw)=f_0+n\Delta'_{+\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{2}f''_{+\frac{1}{2}},$$

式中 $f''_{+\frac{1}{2}}$ 为相应的二次差之半和；为了区别起見，在本格式中將它列入括号內。根据我們所制的內插格式求得：

$$f_0=+15°33'41''.61,$$

$$\Delta'_{+\frac{1}{2}}=-0.69,$$

$$f''_{+\frac{1}{2}}=+0.44.$$

按下列格式算出白塞尔公式中的第二項及第三項之和，即函数 f_0 的起始値的总改正数。

$n\Delta'_{+\frac{1}{2}}$	$-0''.69\times0.34993$	$-0''.241$
$\frac{n(n-1)}{2}f''_{+\frac{1}{2}}$	$+0''.44\times(-0.11374)$	$-0''.050$
总 改 正 数	—	$-0''.291$

內插公式中第三項的系数値：

$$\frac{n(n-1)}{2}=-0.11374$$

是由"1953年的苏联天文年历"(432頁)中名为"白塞尔內插公式的系数"的第IX輔助表中查得的。

若按"苏联天文年历中的第X表(433頁)計算二次差的改正数，也可得到同样的結果，即 $-0''.050$。

加上所求得的改正数(湊整至 $0''.01$)，最后得：

δ_0	$+15°33'41''.61$
改正数	$-\quad 0\ .29$
δ	$+15°33'41''.32$

§69. 根据星表計算岁首的恒星平坐标·2957 顆星的星表·1967 顆星的星表

天文測量員虽然不是經常，但有时也必須观测一些在"苏联天文年历"的星表中沒有載出平坐标的恒星。如用等高法(馬札也夫法)同时測定經度和緯度时，或用測量兩星子午天頂距的微小差数的方法(太尔各特法)測定緯度时，可能發生上述情形。在这种情况下，天文測量員必須亲自利用任一基本星表或綜合星表計算所观测的星在观测年岁首的平位置。在本节中，我們將討論兩种这样的星表，它們是天文測量員在上述情况下所必須經常与之發生关系的星表。但我們首先应該注意的是进行这种計算所用的公式。

这兒要解决的問題可簡述如下：已知恒星在历元 t_0 时的平坐标 α_0 和 δ_0，求該星在历元 t 时的平坐标 α 和 δ。同时，历元 t_0 和 t 以年的整数表示，俾使其能适用于任一年的岁首。由以前的論述(参閱第六章)我們知道，由于岁差和自行的兩种原因，恒星的平坐标是隨着时間而不断地变化的。因而，我們可以写成：

$$\alpha = f_1(t); \qquad \delta = f_2(t).$$

將上式展为台劳級数，并止于具有三阶导数之項，則得：

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \frac{t-t_0}{1}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{(t-t_0)^3}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3},\\ \delta &= \delta_0 + \frac{t-t_0}{1}\frac{d\delta}{dt} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{(t-t_0)^3}{6}\frac{d^3\delta}{dt^3}.\end{aligned} \tag{a}$$

若我們將自变量的微分 dt 用下式表示：

$$dt = 1\text{ 年},$$

則导数 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 恰是每一坐标在一年内的变化。因此导数 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 称为**周年变化**。在此場合下，經常采用其拉丁名称 variatio

annua，其簡写为(v.a.) 所以，可写为：

$$\frac{d\alpha}{dt}=(\text{v.a.})_{\alpha},$$
$$\frac{d\delta}{dt}=(\text{v.a.})_{\delta}. \qquad (б)$$

但平坐标 α 和 δ 是由于岁差和自行这兩种原因而在变化的。因此，每一个坐标的周年变化是由兩种变化所構成的；一种是因岁差而引起的周年变化，另一种是因自行而引起的周年变化。或者把它写成：

周年变化＝周年岁差＋周年自行；

或

$$(\text{v.a.})_{\alpha}=(\text{p.a.})_{\alpha}+\mu_{\alpha},$$
$$(\text{v.a.})_{\delta}=(\text{p.a.})_{\delta}+\mu_{\delta}, \qquad (в)$$

式中字母 p.a.表示**周年岁差**。

二阶导数 $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ 和 $\frac{d^2\delta}{dt^2}$ 是一阶导数 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 的量的变化，即周年变化$(\text{v.a.})_{\alpha}$和$(\text{v.a.})_{\delta}$的变化。但由于这些量的变化非常緩慢，所以在此总是取其在一百年內的变化，这种变化称为**百年变化**或**世紀变化**，簡写为(v.s.)。于是可写成：

$$(\text{v.s.})_{\alpha}=100\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$
$$(\text{v.s.})_{\delta}=100\frac{d^2\delta}{dt^2}. \qquad (г)$$

对于第三項，同样也可代以簡写符号，但对此沒有一种規定了的通用符号，因此每次都必須說明在該場合中是怎样表示的。最常見的符号为：

$$III_{\alpha}=\frac{100^3}{6}\times\frac{d^3\alpha}{dt^3},$$
$$III_{\delta}=\frac{100^3}{6}\times\frac{d^3\delta}{dt^3}. \qquad (д)$$

今以(в),(г)和(д)三式中的符号代入(а)式得:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0 + (t-t_0)(\mathrm{v.a.})_\alpha + \frac{(t-t_0)^2}{200}(\mathrm{v.s.})_\alpha + \left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3 III_\alpha, \\
\delta &= \delta_0 + (t-t_0)(\mathrm{v.a.})_\delta + \frac{(t-t_0)^2}{200}(\mathrm{v.s.})_\delta + \left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3 III_\delta.
\end{aligned} \tag{238}
$$

(238) 式就是用来按基本星表或綜合星表計算各星在任意一年岁首的平坐标的实用公式。这种計算是很容易的,因为在基本星表中經常对每一顆星載有进行这种計算用的資料,而在綜合星表中大部分載有这种資料。这些資料就是:星表历元的平坐标 α_0 和 δ_0; 平坐标的周年变化 (v.a.) 和世紀变化 (v.s.),以及"第三項" III_α 和 III_δ。但第三項仅对赤緯較大的星才多少有較大的数值;对于其余的星,則仅在时間段很長的情况下,第三項数值才能达到較显著的影响。因此 (238) 式中的第三項多半被省去。那末为了計算方便起見,(238)式可改写为:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0 + (t-t_0)\left[(\mathrm{v.a.})_\alpha + \frac{t-t_0}{200}(\mathrm{v.s.})_\alpha\right], \\
\delta &= \delta_0 + (t-t_0)\left[(\mathrm{v.a.})_\delta + \frac{t-t_0}{200}(\mathrm{v.s.})_\delta\right].
\end{aligned} \tag{239}
$$

不难証明,在方括号中的式子不是別的,而是从 t_0 到 t 整个时間段內的周年变化的平均值,实际上同样是 α 和 δ 在 t_0 和 t 正中間那一历元的周年变化值。

就很短的时間段,如一年兩年来說,或在近似計算时,可仅取其第一項,即可采用如下形式之(238)式:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0 + (t-t_0)(\mathrm{v.a.})_\alpha, \\
\delta &= \delta_0 + (t-t_0)(\mathrm{v.a.})_\delta.
\end{aligned} \tag{240}
$$

在公式(238)、(239)和(240)中,往往將周年变化、世紀变化及第三項的脚符号省略,也就是把它們簡写为(v.a.)、(v.s.)和 III。但是,在这种情况下,必須牢記,α 和 δ 的周年变化、世紀变化和"第

三項"是以不同的單位(′或″)表示的，并且具有完全不同的数值。

同样必須記住：周年变化不仅包括周年岁差，而且还包括相应坐标的周年自行；在世紀变化中，同样顧及到了因每一坐标的岁差而产生的周年自行的变化。因此，在应用(238)式、(239)式或(240)式时，無需对自行及其变化进行任何特殊的計算。

現在我們来叙述天文測量員在其日常工作中可能遇到的兩种星表，关于这一点在本节的开始順便提到过。

1. "赤緯由 -10° 到 $+90^\circ$ 的 2957 顆星的星表"。

有关这个綜合星表的某些情况在§67 中已提到过。正如所有的星表一样，其中恒星的位置是按赤經的增加次序排列的。在左边偶数頁上載有一切与赤經有关的数据，而在右边奇数頁上載有一切与赤緯有关的数据。

在左边偶数頁上載有：

第一欄——編号。

第二和第三欄——在 GC 和 FK3 基本星表中的編号。

第四欄——星等 Mg.

第五欄——光譜 Sp.

第六欄——在星表历元为 1950.0 时的赤經 $\alpha_{1950.0}$。

第七欄——在同一历元的赤經周年变化 VA_α。

第八欄——在同一历元的赤經世紀变化 VS_α。

第九欄——赤經的"第三項" III_α。

第十欄——取自 GC 星表的历元为 1950.0 的赤經自行 μ。

第十一欄——赤經自行的百年变化 $100\Delta\mu$，以 $0^s,0001$ 为單位。

第十二欄——赤經的平均观测历元(对 1334 顆星的綜合星表中的星而言)。

第十三欄——赤經的观测总数 n (对 1334 顆星的綜合星表中

的星而言)。

第十四欄——化为 FK3 系統的赤經表的归算数 R_{FK3}，以 $0^s.001$ 为單位。

第十五欄——归算数的十年变化 $10\Delta R$, 以 $0^s.001$ 为單位。

第十六欄——化算为 GC 系統的赤經表的归算数 R_{GC}, 以 $0^s.001$ 为單位。

在右边奇数頁上載有:

第十七欄——編号。

第十八欄——在"1967 顆星的星表"中的編号。

第十九欄——星表历元时的赤緯 $\delta_{1950.0}$。

第二十、二十一及二十二欄——分别为周年变化 VA_δ、世紀变化 VS_δ 及"第 III 項"III_δ。

第二十三及二十四欄——分别为星表历元时的赤緯自行 μ' 及其百年变化 $100\Delta\mu'$。

第二十五欄——赤緯的平均观測历元。

第二十六欄——赤緯的观測总数 n。

第二十七及二十八欄——化为 FK3 系統的赤緯表的归算数 R'_{FK3} 及其十年变化 $10\Delta R'$。

第二十九欄——化为 GC 系統的赤緯表的归算数 R'_{GC}。

第三十欄——附注，其中載有各星的名称和其他資料。

記載于4、5、7—11及20—24等欄中的数据系取自鮑斯总星表。

由于"2957 顆星的星表"的历元为 1950.0。故將(238)式按該星表的符号改写如下:

$$\alpha_t=\alpha_{1950}+(t-1950).VA_\alpha+\frac{(t-1950)^2}{200}VS_\alpha+\left(\frac{t-1950}{100}\right)^3III_\alpha, \tag{241}$$

$$\delta_t=\delta_{1950}+(t-1950)VA_\delta+\frac{(t-1950)^2}{200}VS_\delta+\left(\frac{t-1950}{100}\right)^3III_\delta.$$

恒星自行μ和μ'及其百年变化$100\Delta\mu$和$100\Delta\mu'$在上述两公式中均已顧及到，这是很明显的。因此，在采用这些公式时，对10、11、23和24欄中的数据，用不着再作更多的考慮。

本星表由星表历元t_0(1950.0)化为历元为t的FK3系統的位置归算，是根据14、15、27和28各欄內的数据用下列公式計算的：

$$\begin{aligned}(\alpha_t)_{FK3}&=\alpha_t+R_{FK3}+10\Delta R\frac{t-1950}{10},\\(\delta_t)_{FK3}&=\delta_t+R'_{FK3}+10\Delta R'\frac{t-1950}{10}.\end{aligned}\qquad(242)$$

式中后几項之和分别为所求的在历元为t时的α和δ的归算数。

2) 历元为1950.0的1967顆星的星表(FK3系統)(此星表为太尔各特法测緯法用的)，并附有化为視位置用的归算数。

这个星表是在1948年出版的。它是“1967顆星的綜合星表”的第二版，关于它在1933年發行的初版已于§67中叙述过。該星表包含有与初版时相同的1967顆恒星，并載有相同的資料，但同时也与初版时有着很大的差别。1933年出版的“1967顆星的星表”是屬于天文研究所編制的“历元为1915.0的1631顆星的基本赤緯綜合星表”的系統的，其历元为1930.0；而1948年出版的“1967顆星的星表”是屬于FK3系統的，其历元为1950.0。其中約有三分之一以上的恒星坐标直接取自FK3星表，其余的恒星坐标則取自GC“总星表”，而用系統改正化算为FK3系統。于是，1948年出版的“1967顆星的星表”也是一种綜合星表，只是它的形式不和初版相同，而与“苏联天文年历”中的星表的形式相象(参閱§68)。

由于“1967顆星的星表”是專为其标題上所指出的緯度測定法服务而編制的，也就是为測量兩星的子午天頂距的微差決定緯度的方法服务而編制的(即所謂太尔各特法)，因而在星表內載有精确的赤緯值(算至0″.01)和近似的赤經值(算至0ˢ.1)。

星表的主体載于左边偶数頁上；至于右边奇数頁上所載的内容，將在 § 70 中予以說明。

星表的結構如下：

第一欄——星号。在本星表的初版中，各星是按赤經增加的次序編号的；在第二版中仍旧保持其原来的編号，但由于第二版的历元和初版的历元相隔了二十年，在这二十年中，各星的赤經因岁差和自行而發生了显著的变化，并且各星的变化又是互不相同的，所以各星的前后次序在某些地方有所改变，这就使第二版中編号的前后次序在某些地方已被破坏。在編号脫离了数字的自然排列次序的这种地方在編号下划一横綫。

第二欄——星等 m。

第三欄——星表历元时的赤經 α_{1950}，記載至十分之一时秒。

第四欄——赤經的周年变化，記載至百分之一时秒。

第五欄——星表历元时的赤緯 δ_{1950}，記載至百分之一度秒。

第六欄——赤緯的周年变化，記載至千分之一度秒。

第七欄和第八欄——分别为赤緯的世紀变化（記載至千分之一度秒）和赤緯的自行变化 μ'（也記載至千分之一度秒）。

第九欄和第十欄——分别为在 GC 和 FK3 基本星表中的編号。

按照对 α 和 δ 所要求的精度之不同，并顧及星表的历元（1950.0），对于計算恒星在任一年 t 岁首的平坐标，应該自(240)式中取其第一式，自(239)式中取其第二式，并按星表的符号改写为：

$$\alpha_t=\alpha_{1950}+(t-1950)(\text{an. var.}),$$

$$\delta_t=\delta_{1950}+(t-1950)\left[(\text{an. var.})+\frac{t-1950}{200}(\text{sec. var.})\right]. \tag{243}$$

例

1）試按"2957 顆星的星表"計算 1883 号星在 1953 年岁首和 2050 年岁首的平坐标。

以(238)各式，或(241)各式作为該計算的实用公式。

首先自"2957 顆星的星表"中（92 和 93 頁），分别从 6—9 欄和 19—22 欄內查出 1883 号星的：

$\alpha_0, (\text{v.a.})_\alpha, (\text{v.s.})_\alpha, III_\alpha;\ \delta_0, (\text{v.a.})_\delta, (\text{v.s.})_\delta, III_\delta$.

α_0	$15^h43^m52^s.668$
$(\text{v.a.})_\alpha$	+ 2 .7692
$(\text{v.s.})_\alpha$	+ 0 .0043
III_α	+ 0 .001
δ_0	$+15°34'\ 36''.99$
$(\text{v.a.})_\delta$	− 11 .271
$(\text{v.s.})_\delta$	+ 0 .340
III_δ	+ 0 .08

然后，按(238)式編成采用計算机計算的格式，并循序填写。

t	1953	2050
t_0	1950	1950
$t-t_0$	3	100
....	....	....
$(t-t_0)^2$	9	1 00 00
$(t-t_0)^3$	27	1 000 000
....	....	....
$\frac{(t-t_0)^2}{200}$	0.045	50
$\frac{(t-t_0)^3}{100^3}$	0.000027	1

α_0	$15^h43^m52^s.668$	$15^h43^m52^s.668$
$(t-t_0)(\text{v.a.})_\alpha$	+ 8 .3076	+ 4 36 .92
$\frac{(t-t_0)^2}{200}(\text{v.s.})_\alpha$	+ 0 .0002	+ 0 .215
$\frac{(t-t_0)^3}{100^3}III_\alpha$	+ 0 .0000	+ 0 .001
α_t	$15^h44^m\ 0^s.9758$	$15^h48^m29^s.804$

δ_0	$+15°34'36''.99$	$+15°34'36''.99$
$(t-t_0)(\text{V.a.})_\delta$	$-\quad 33\ .813$	$-\quad 18\ 47\ .1$
$\frac{(t-t_0)^2}{200}(\text{V.s.})_\delta$	$+\quad 0\ .015$	$+\quad 17\ .00$
$\frac{(t-t_0)^3}{100^3}III_\delta$	$+\quad 0\ .000$	$+\quad 0\ .08$
δ_t	$+15°34'\ 3''.192$	$+15°16'\ 6''.97$

于是我們得

$$1953.0:\ \alpha=15^h44^m0^s.976,\quad \delta=+15°34'3''.19;$$

$$2050.0:\ \alpha=15^h48^m29^s.804;\ \delta=+15°16'6''.97.$$

在附注中("2957 颗星的星表"的 93 頁，第 30 欄)載明 1883 号星是巨蛇座用。所以,这星正是我們刚刚算过其視坐标的那顆星(參閱 § 68 例 3 及例 4),它在"苏联天文年历"中的星表內列为 378 号。

由"1953 年的苏联天文年历"中查出它在 1953 年岁首的平坐标(378 頁):

$$\alpha=15^h44^m0^s.985;\ \delta=+15°34'3''.60;$$

因为"2957 颗星的星表" 的系統和用以編制 "苏联天文年历" 星表的 FK3 系統不同,所以我們采取"天文年历"减去"2957 顆星的星表"而求得的坐标差:

$$\Delta\alpha=+0^s.009,\ \Delta\delta=+0''.41,$$

首先是由于 FK3 系統与"2957 颗星的星表" 系統不同之故。为了証实这一点,我們自"2957 顆星的星表"(第 92 頁和第 93 頁; 14、15、27 和 28 欄)中查出在 1950.0 的兩个坐标的归算数 R_{FK3} 和 R'_{FK3}，及其十年变化 $10\Delta R$ 和 $10\Delta R'$，并分別算出它們在 1953.0 的归算数,然后將所算得的坐标按(242)式化为 FK3 系統,則得:

R_{FK3}	$+0^s.009$
$10\Delta R$	$+0.002$
R'_{FK3}	$+0''.39$
$10\Delta R'$	$+0\ .07$

α_t	$15^h44^m\ 0^s.976$
R_{FK3}	$+\quad 0\ .009$
$10\Delta R\frac{t-1950}{10}$	$+\quad 0\ .001$
$(\alpha_t)_{FK3}$	$15^h44^m\ 0^s.986$
δ_t	$+15°34'\ 3''.19$
R'_{FK3}	$+\quad 0\ .39$
$10\Delta R'\frac{t-1950}{10}$	$+\quad 0\ .02$
$(\delta_t)_{FK3}$	$+15°34'\ 3''.60$

于是我們看出,將根据"2957 顆星的星表"(有时称"大地恒星星表")所算得的巨蛇

座周的平坐标化算为 FK3 系統后，这些坐标和“1953 年苏联的天文年历”所載該星的平坐标間，赤經相差 $0^s.001$，赤緯則完全一致。在此，赤經差 $0^s.001$ 的产生，是因为在計算归算数 R_{FK3} 及其十年变化时有凑整误差之故。在其他情况中，这种类似的差异可解釋为在不同星表中同一顆星的坐标的个別差异，而且是具有偶然性的。

为了証实前述說法，我們只要將巨蛇座周在 2050 年的平坐标計算与其在 1953 年的平坐标計算作个比較，就可确信，对于不是近極的星来說，第三項的影响只有当时間段很長时才是显著的。

一切計算均用計算机；对某些連乘来說，也可以用計算尺。

2）試根据“1967 顆星的星表”計算 1215 号星在 1953 年岁首的平坐标；赤經近似地算至十分之一时秒，赤緯比較精确地算至百分之一度秒。

根据題目，我們取(240)式中的第一式和(239)式中的第二式作为实用公式，或者取(243)式作为实用公式，兩者都一样。

首先由“1967 顆星的星表”中查出我們所需的数值：α_0，$(\text{v.a.})_\alpha$，δ_0，$(\text{v.a.})_\delta$ 和 $(\text{v.s.})_\delta$，(58 頁，3、4、5、7、8 各欄)：

α_0	$15^h43^m52^s.7$
$(\text{v.a.})_\alpha$	+ 2 .77
....	....
δ_0	$+15°34'37''.38$
$(\text{v.a.})_\delta$	− 11 .265
$(\text{v.s.})_\delta$	+ 0 .340

今按上述之实用公式，編一表格进行必要的計算：

t	1953
t_0	1950
$t-t_0$	3
α_0	$15^h43^m52^s.7$
$(\text{v.a.})_\alpha(t-t_0)$	+ 8 .3
α_t	$15^h44^m\ 1^s.0$
$\frac{t-t_0}{200}$	0 .015
$(\text{v.s.})_\delta$	$+ 0''.340$
$(\text{v.s.})\cdot\frac{t-t_0}{200}$	+ 0 .005
$(\text{v.a})_\delta$	−11 .265
$[(\text{v.a.})_\delta]_{平}$	−11 .260
$[(\text{v.a.})_\delta]_{平}(t-t_0)$	−33 .780
δ_0	$+15°34'37''.38$
δ_t	$+15°34'\ 3''.60$

虽然在“1967顆星的星表”中沒有星的名称，但根据坐标的数值相同我們可看出，这是在上例中所遇到的同一顆星，即巨蛇座ι。

一切計算均用計算机，但对某些連乘可以用計算尺。

由于 1215 号星在 1953 年历元的平坐标的計算結果完全与“1953年的苏联天文年历”中所載的相同（按 α 乃是在計算精度的限度內）于是我們得：

$$\alpha=15^h44^m1^s.0;\ \ \delta=+15^\circ34'3''.60.$$

这种符合的原因，当然是由于“苏联天文年历”和“1967顆星的星表”所載各星的坐标都是屬于同一系統即屬于 FK3 系統的緣故。

因此，尽管在“1967顆星的星表”中沒有載出各星的名称，但确定恒星的名称和查明在“苏联天文年历中是否載有它的坐标总是很容易的。这只須將“1967顆星的星表”中的恒星坐标与“苏联天文年历”中任一恒星的最相近的坐标作一比較就行。

因为“1967顆星的星表”的历元是 1950.0，所以对这种比較来說，采用“1950年的苏联天文年历”最为恰当，否則，应顧及坐标因岁差和自行所引起的变化。

截相同的星而論，应用“2957顆星的星表”也是很方便的。事实上，在“1967顆星的星表”(各偶数頁上的第 9 欄和第 10 欄）中便載有 GC 系統的編号和 FK3 系統的編号；而在“2957顆星的星表”(各偶数頁上的第 2 欄和第 3 欄)中，也載有此兩系統的編号，而且，还載有“1967顆星的星表”的編号(奇数頁上的第 18 欄)，最后，在附注欄內(奇数頁上的第 30 欄)还載有恒星的名称，这些名称是按照所屬星座的簡写国际符号表示的。为了这个目的，也可应用其他星表，但此时必須計及历元差，并且还要顧及各星表的系統差。星表的系統差可就每个恒星按照屢次提到过的有关系統差的特别用表計算之。

恒星的同一性一般是以在同一系統內就同一历元所載出的坐标相同，以及它們星等相同来确定的。

§70. 視位置的化算

在§69开始时所說的情况下，以及当所观测的星在"苏联天文年历"中仅載有其平坐标，而未載出其視位置时，观測者查得該年岁首的平坐标后，在整理观測时，必須自己来計算該星在观測瞬間的視坐标，亦卽必須进行象我們所知道的所謂**化平位置为視位置**的工作。

要記住，在此必須計算：

1）由岁首到观測瞬間这一段时間內岁差的影响；

2）在此同一时間段內自行的影响；

3）在观測瞬間章动的影响；

4）在此同一瞬間周年光行差的影响。

为了化算为視位置，对每一坐标所采用的公式，其結構固然是非常复杂的，但却能同时顧及到上述四种影响。为了便于計算，象我們將要見到的那样，可將公式化成相当簡單的形式。

現在我們来推求这种公式。

这样，我們是已知岁首恒星的平赤經 α_0 和平赤緯 δ_0，而求該星在观測瞬間的視坐标 $\alpha_{視}$ 和 $\delta_{視}$。

为了这一目的，首先必須計算**观測瞬間的平坐标** α 和 δ；因此就必須將由岁首 t_0 到观測瞬間 t 这一时間段 $\tau=t-t_0$ 內的自行和岁差的影响加入岁首的平坐标 α_0 和 δ_0 內。

同时，上述的时間段常以十分之一年为單位，亦卽 τ 为一个小于1的十进位小数。

为了計算在很短的时間段 τ 內的岁差，我們采用公式(224)（參閱§59）。这个公式在本場合中，可改写为：

$$
\begin{aligned}
\alpha'-\alpha_0&=(m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta)\tau,\\
\delta'-\delta_0&=n\cos\alpha\ \tau.
\end{aligned}
\tag{а}
$$

为了計算在此同一时間段 τ 内的自行，我們采用公式(232)(参閱 § 61)，并將其改写为:

$$
\alpha-\alpha'=\mu_\alpha\tau;\quad \delta-\delta'=\mu_\delta\tau.
\tag{б}
$$

根据(а)、(б)兩式，岁差和自行的共同影响可以用下式表示:

$$
\begin{aligned}
\alpha-\alpha_0&=(m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta)\tau+\mu_\alpha\tau,\\
\delta-\delta_0&=n\cos\alpha\cdot\tau+\mu_\delta\tau.
\end{aligned}
\tag{в}
$$

因而，就观測瞬間的平坐标 α 和 δ 而言，則有下列公式:

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\alpha_0+(m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta)\tau+\mu_\alpha\tau,\\
\delta&=\delta_0+n\cos\alpha\ \tau+\mu_\delta\tau.
\end{aligned}
\tag{г}
$$

現在我們来計算观測瞬間的**眞坐标 $\alpha_{眞}$ 及 $\delta_{眞}$**，亦即求出在观測瞬間章动的影响并將其加入同一瞬間的平坐标内。为了計算章动的影响，采用公式(228′)(参閱 § 60)，在此可將它改写为:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{眞}-\alpha&=(\Delta\psi)\cos\varepsilon+(\Delta\psi)\sin\varepsilon\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta,\\
\delta_{眞}-\delta&=(\Delta\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha.
\end{aligned}
\tag{д}
$$

根据(в)、(д)兩式，岁差、章动和自行的共同影响可以用下式表示:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{眞}-\alpha_0&=(m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta)\tau+(\Delta\psi)\cos\varepsilon+\\
&\quad+(\Delta\psi)\sin\varepsilon\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta+\mu_\alpha\tau,\\
\delta_{眞}-\delta_0&=n\cos\alpha\cdot\tau+(\Delta\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha+\mu_\delta\tau.
\end{aligned}
\tag{е}
$$

因而，观測瞬間的眞坐标 $\alpha_{眞}$ 和 $\delta_{眞}$ 应按下列公式計算:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{眞}&=\alpha_0+(m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta)\tau+(\Delta\psi)\cos\varepsilon+\\
&\quad+(\Delta\psi)\sin\varepsilon\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta+\mu_\delta\tau,\\
\delta_{眞}&=\delta_0+n\cos\alpha\cdot\tau+(\Delta\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha+\mu_\delta\tau.
\end{aligned}
\tag{ж}
$$

現在我們用下面的方法来改变(е)式，这样也就是改变(ж)式。采用 § 59 的(222′)式:

$$m=-q_1+p_1\cos\varepsilon,\quad n=p_1\sin\varepsilon;$$

式中 q_1 为行星的周年岁差，p_1 为日月岁差。

根据这两个公式，以 p_1 和 q_1 表示 $\sin\varepsilon$ 和 $\cos\varepsilon$。于是得：

$$\sin\varepsilon=\frac{n}{p_1};\quad \cos\varepsilon=\frac{m+q_1}{p_1}.$$

將此二值代入(e)式中的第一式，得：

$$\alpha_{真}-\alpha_0=(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\tau+(\Delta\psi)\frac{m+q_1}{p_1}+$$

$$+(\Delta\psi)\frac{n}{p_1}\sin\alpha\operatorname{tg}\delta-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,$$

上式經过整理后，可以稍改变其形式，即：

$$\alpha_{真}-\alpha_0=(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}m+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}q_1+$$

$$+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,$$

或：

$$\alpha_{真}-\alpha_0=(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)-$$

$$-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\operatorname{tg}\delta+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}q_1+\mu_\alpha\tau,$$

最后：

$$\alpha_{真}-\alpha_0=(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\left(\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}\right)-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\operatorname{tg}\delta+$$

$$+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}q_1+\mu_\alpha\tau.$$

用同样的方法改变(e)式中的第二式为：

$$\delta_{真}-\delta_0=n\cos\alpha\cdot\tau+(\Delta\psi)\frac{n}{p_1}\cos\alpha+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha+\mu_\delta\tau,$$

或
$$\delta_{真}-\delta_0=n\cos\alpha\left(\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}\right)+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha+\mu_\delta\tau.$$

这样，經过这些換算之后，(e)式的形式为：

$$\alpha_{\text{真}}-\alpha_0=(m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta)\left(\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}\right)-(\Delta\varepsilon)\cos\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta+$$

$$+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}q_1+\mu_\alpha\tau, \tag{е′}$$

$$\delta_{\text{真}}-\delta_0=n\cos\alpha\left(\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1}\right)+(\Delta\varepsilon)\sin\alpha+\mu_\delta\tau.$$

我們看出，在此可以把与坐标有关的因子和与时間有关的因子(参閱 § 55)分出。并用字母 a, b, a', b' 表示第一种因子；而以字母 $(A), (B), E$ 表示第二种因子。这样就可采用下列符号：

$$(A)=\tau+\frac{(\Delta\psi)}{p_1},\quad (B)=-(\Delta\varepsilon),\quad E=\frac{(\Delta\psi)}{p_1}q_1; \tag{з}$$

$$a=m+n\sin\alpha\ \mathrm{tg}\ \delta,\quad b=\cos\alpha\ \mathrm{tg}\delta; \tag{и}$$

$$a'=n\cos\alpha,\quad b'=-\sin\alpha. \tag{к}$$

將(з)、(и)、(к)三式代入(е′)式后，得：

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{真}}-\alpha_0&=(A)a+(B)b+E+\mu_\alpha\tau,\\ \delta_{\text{真}}-\delta_0&=(A)a'+(B)b'+\mu_\delta\tau.\end{aligned} \tag{л}$$

根据 § 60 的公式(л)：

$$(\Delta\psi)=\Delta\psi+d\psi,\quad (\Delta\varepsilon)=\Delta\varepsilon+d\varepsilon;$$

即黃經章动$(\Delta\psi)$和交角章动$(\Delta\varepsilon)$，都是由長周期項和短周期項綜合而成的。但根据实踐，对長周期項和短周期項的計算，通常是分別計算更方便一些，而短周期項常常可以忽略。

將 $\Delta\psi+d\psi$ 及 $\Delta\varepsilon+d\varepsilon$ 分別代入(з)式中的前二式以代替$(\Delta\psi)$和$(\Delta\varepsilon)$，得：

$$(A)=\tau+\frac{\Delta\psi+d\psi}{p_1}=\left(\tau+\frac{\Delta\psi}{p_1}\right)+\frac{d\psi}{p_1},$$

$$(B)=-(\Delta\varepsilon+d\varepsilon)=-\Delta\varepsilon-d\varepsilon;$$

或另写为

$$(A)=A+A',\quad (B)=B+B'; \tag{м}$$

因此式中：

$$A=\tau+\frac{\Delta\psi}{p_1},\quad B=-\Delta\varepsilon; \tag{н}$$

$$A'=\frac{d\psi}{p_1},\quad B'=-d\varepsilon. \tag{о}$$

这样一来，以(н)式表示的归算数 A 和 B 是計算岁差和長周期章动項的影响的；而以(о)式表示的归算数 A' 和 B' 則是計算短周期章动項的影响的。

至于(з)式中的第三式，卽归算数 E，这个量一般是很小的；其絕对値不超过 $0^s.003$，而短周期章动項的影响不应超过此量的二百分之一。因此在 E 量中，可以完全不顧及短周期章动項的影响，幷將(з)式中的第三式改写为：

$$E=\frac{\Delta\psi}{p_1}q_1. \tag{п}$$

当这样确定以后，公式(л)就可改写为：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{真}-\alpha_0&=(A+A')a+(B+B')b+E+\mu_\alpha\tau,\\ \delta_{真}-\delta_0&=(A+A')a'+(B+B')b'+\mu_\delta\tau.\end{aligned}\right\} \tag{л$'$}$$

同时还可以写为另一种形式：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{真}-\alpha_0&=Aa+Bb+E+A'a+B'b+\mu_\alpha\tau,\\ \delta_{真}-\delta_0&=Aa'+Bb'+A'a'+B'b'+\mu_\delta\tau,\end{aligned}\right\} \tag{244}$$

式中 Aa、Bb、E 以及相应的 Aa' 和 Bb' 是計算岁差和長周期章动項的影响的；而 $A'a$, $B'b$, $A'a'$, $B'b'$ 是計算短周期章动項的影响的。

公式(244)，或公式(л)或(л′)都是一样，还可以用另一种形式表示。为此，將(н)和(к)兩式中的各式代入(224)式以代替 a, b, a', b'，亦卽將公式(244)改写为：

$$\begin{aligned}\alpha_{真}-\alpha_0&=A(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)+B\cos\alpha\operatorname{tg}\delta+\\&\quad+E+A'(m+n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)+B'\cos\alpha\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,\\ \delta_{真}-\delta_0&=An\cos\alpha-B\sin\alpha+A'n\cos\alpha-B'\sin\alpha+\mu_\delta\tau,\end{aligned}$$

去括号，幷調整各項，則得：

$$\begin{aligned}\alpha_{真}-\alpha_0&=Am+E+(An\sin\alpha+B\cos\alpha)\operatorname{tg}\delta+A'm+\\&\quad+(A'n\sin\alpha+B'\cos\alpha)\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,\\ \delta_{真}-\delta_0&=An\cos\alpha-B\sin\alpha+A'n\cos\alpha-B'\sin\alpha+\mu_\delta\tau.\end{aligned}$$

引入符号:

$$f=Am+E,\quad g\cos G=An,\quad g\sin G=B;$$

以及 $$f'=A'm,\quad g'\cos G'=A'n,\quad g'\sin G'=B'.$$

此时,我們的公式又可写为:

$$\alpha_{真}-\alpha_0=f+(g\cos G\sin\alpha+g\sin G\cos\alpha)\operatorname{tg}\delta+f'+$$
$$+(g'\cos G'\sin\alpha+g'\sin G'\cos\alpha)\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,$$
$$\delta_{真}-\delta_0=g\cos G\cos\alpha-g\sin G\sin\alpha+g'\cos G'\cos\alpha-$$
$$-g'\sin G'\sin\alpha+\mu_\delta\tau,$$

或 $$\alpha_{真}-\alpha_0=f+g(\sin G\cos\alpha+\cos G\sin\alpha)\operatorname{tg}\delta+f'+$$
$$+g'(\sin G'\cos\alpha+\cos G'\sin\alpha)\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,$$
$$\delta_{真}-\delta_0=g(\cos G\cos\alpha-\sin G\sin\alpha)+$$
$$+g'(\cos G'\cos\alpha-\sin G'\sin\alpha)+\mu_\delta\tau,$$

最后为:

$$\alpha_{真}-\alpha_0=f+g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta+f'+g'\sin(G'+\alpha)\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\tau,$$
$$\delta_{真}-\delta_0=g\cos(G+\alpha)+g'\cos(G'+\alpha)+\mu_\delta\tau. \tag{245}$$

在(245)式中的第一式内,也就是在赤經的計算式內,其前面兩項 f 和 $g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta$ 是計算岁差和長周期章动項的影响的,而第三項 f' 和第四項 $g\sin(G'+\alpha)\operatorname{tg}\delta$ 則系計算短周期章动項的影响的。(245)式中第二式的第一項 $g\cos(G+\alpha)$ 是計算岁差及長周期章动的;而第二項 $g'\cos(G+\alpha)$ 則系計算短周期章动的。

于是,为了根据岁首的平坐标,并顧及岁差、章动和自行来計算观测瞬間的真坐标,可以根据公式(244)或(245)写出下列公式,即以代数形式的或三角式的真坐标計算式代替(ж)式:

$$\alpha_{真}=\alpha_0+Aa+Bb+E+A'a+B'b+\mu_\alpha\cdot\tau,$$
$$\delta_{真}=\delta_0+Aa'+Bb'+A'a'+B'b'+\mu_\delta\cdot\tau, \tag{244'}$$

或 $$\alpha_{真}=\alpha_0+f+g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta+f'+$$
$$+g'\sin(G'+\alpha)\operatorname{tg}\delta+\mu_\alpha\cdot\tau, \tag{245'}$$
$$\delta_{真}=\delta_0+g\cos(G+\alpha)+g'\cos(G'+\alpha)+\mu_\delta\cdot\tau.$$

現在我們来談觀測瞬間視坐标的計算問題。在此，为了計算周年光行差的影响，我們应用(213)式或(214)式。这兩种公式都已在第六章§55中推出。現將公式(213)式改写为:

$$\begin{aligned}\alpha_{視}-\alpha_{眞}&=Cc+Dd,\\ \delta_{視}-\delta_{眞}&=Cc'+Dd',\end{aligned}\tag{246}$$

归算数 C, D 和恒星归算常数 c、d、c'、d' 之値分别按公式(211)和(212)确定。

把剛才所得的公式和其相应的公式(244′)逐項相加，最后得:

$$\begin{aligned}\alpha_{視}&=\alpha_0+Aa+Bb+Cc+Dd+E+A'a+B'b+\mu_\alpha\cdot\tau,\\ \delta_{視}&=\delta_0+Aa'+Bb'+Cc'+Dd'+A'a'+B'b'+\mu_\delta\cdot\tau.\end{aligned}\tag{247}$$

上式称为第一类視位置化算公式，或称为視位置代数式的化算公式。

A、B、C、D、E、A' 及 B' 之各量称为第一类归算数。它們分别按本节的(н)、(о)、(п)三式及在§55中所推出的(211)式計算之。

仔細地研究一下这些公式，就可以确定: A 和 A' 是無名数；而 B、C、D、E 及 B' 为名数，其中除 E 外都以度秒表示；E 以时秒表示較为方便，因为它包含在 α 的計算式中。

取决于恒星坐标的各量——a、b、c、d、a'、b'、c' 和 d'，称为恒星归算数，或称为恒星归算常数，因为大約在一年的时間段內，它們是不变的。因此，在計算这些数量时，采用这一年岁首的平坐标 α_0 和 δ_0。本节中的(в)，(к)兩式及在§55中所推出的(212)式可作为計数恒星常数之用。我們根据上述的注意事項，將这些公式进行某些改化，并根据下面的理由把它更明确一些。用以計算視赤經 $\alpha_{視}$ 的(247)式中第一式的各項应以时單位表示。而归算項或改正項应以时秒表示。考虑到上述关于 A、B、C、D、E、A'、B' 等量的名称，就可确定，a 应以时秒表示；b、c、d 为不名数；但为了能得到以时秒表示的 Bb、Cc、Dd、及 $B'b$ 等乘积，那末在 b、c 和 d 中就

应附以系数 1/15。用以計算視赤緯的(247)式中的第二式的各項应以度單位表示，特別是应以度秒表示。因而，a' 应以度秒表示；而 b'、c' 和 d' 为不名数，在此不需附上系数 1/15。

根据这些理由，对于恒星归算常数的計算，有下列实用公式：

$$\begin{aligned} a &= m^s + n^s \sin\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0, \\ b &= \frac{1}{15}\cos\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0, \\ c &= \frac{1}{15}\cos\alpha_0 \sec\delta_0, \\ d &= \frac{1}{15}\sin\alpha_0 \sec\delta_0; \end{aligned} \tag{248}$$

$$\begin{aligned} a' &= n'' \cos\alpha_0, \\ b' &= -\sin\alpha_0, \\ c' &= \operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta_0 - \sin\alpha_0\sin\delta_0, \\ d' &= \cos\alpha_0\sin\delta_0. \end{aligned} \tag{249}$$

因为以大写字母 A、B、C 等表示的归算数仅与时間有关而与坐标無关，所以我們就有可能预先算出这些归算数，并將其載于天文年历中。因此，为了减輕視位置化算的計算工作，在"苏联天文年历"中(参閱"1953 年的苏联天文年历"第 116—123 頁)，每隔一天，更正确的說，每隔一恒星日以格林尼治恒星时 12^h 为准，載出所有第一类的归算数和量 τ，量 τ 是由年初到表列瞬間的时間段，以十分之一年表示。这些表叫做"1953 年归算数表"，其結構如下：

第一欄——載有月分和日期，这些日期以世界时表示，精确到格林尼治民用日千分之一。

第二欄——載有 τ 之值，即由年初到該表所列瞬間的时間段，它以年的小数表示，精确到万分之一年。

第三欄——載有不名数 $A+A'$ 之和，計至万分之一，并附有符号。

第四欄——載有 $B+B'$ 之和，以度秒表示，記載至千分之一，并附有符号。

第五欄和第六欄——分别載有 C 和 D 之值，同样以度秒表示，記載至千分之一，并附有符号。

第七欄——單独載有不名数 A' 之值，以小数后第四位为單位，并附有符号。

第八欄——單独載有 B' 之值，記載至千分之一度秒，并附有符号。

E 之値以时秒表示，記載至万分之一，列于每頁的下面，每隔一个半月載一次。

当进行視位置化算計算时，从 τ 到 B' 的一切归算数都可按这种表用簡易內插法求出其在已知的格林尼治恒星瞬間的数値。为了决定內插間距，最好采用在 §68 中所述的圖解法。此时，必須預先用經度將已知的观測地恒星时化至格林尼治恒星时。

E 之値取自每頁的下面，無需进行任何內插。

按公式(248)和(249)計算 a, b, c 等恒星常数时，其中所包含的 m、n 和 ε 各量可由当年的"苏联天文年历"查出。例如：1953 年(參閱"1953 年的天文年历"第 5 頁)的这些量之値为：

$$m^s = 3^s.07333, \quad n'' = 20''.0423, \quad n^s = 1^s.33616,$$

$$\varepsilon = 23°26'43''.43.$$

除了上述的"归算数"表以外，在"苏联天文年历"中，同样还載有一切在"年历"中未載出視坐标的恒星(拱極星除外)的恒星归算常数。这些恒星正是在平位置表中其名称写在括号里面的恒星。这种表叫做在"年历"中沒有載出視位置的恒星的"恒星归算常数表(历元 1953.0)"，(參閱"1953 年的苏联天文年历"第 302 頁和 303 頁)。此表有以下的簡單結構：

第一欄——載有恒星在"苏联天文年历"中平位置表內(134—

147 頁)的編号。

第二欄——載有以四个字母表示的星名("苏联天文年历"第132頁列有各星位的四个字母的簡写符号)。

其余八欄按順序載有 a, b, c, d, a', b', c' 及 d' 等恒星常数之値,精确到万分之一,并附有符号。

表中各恒星常数的單位未表示出,但須記住,a 以时秒表示,a' 以度秒表示,其余各量則为不名数。

由于恒星常数每次都是按当年平位置表的历元載出的,也就是按当年的岁首載出的,故当对該年的观測进行归化計算时,这些常数可直接由表中查出,而不需进行任何内插。

在"2957 顆星的星表"中(附录 4, 159—279 頁)也載有恒星归算常数。其中載有該星表中各星的全部恒星常数及 1950.0(星表历元)时赤經和赤緯的自行,并附有符号;同时还載有恒星常数的周年变化和自行的百年变化,以每个量的最后一位为單位,并附有符号。(+)号表示量在增加;(−)表示量在减小。表中各数的名称同样沒有表示出来。

赤經的归算数載于左边偶数頁上,赤緯的归算数載于右边奇数頁上。每頁第一欄所載的是"2957 顆星的星表"的編号;其余各欄中的結構很簡單,無須特別說明。在应用此种表时,只須应用簡易的算术計算方法,借載于表中的周年变化將全部归算常数从星表历元(1950.0)化算至观測年历元,并借助百年变化將自行从星表历元(1950.0)化算至观測年历元。

在 1948 年出版的"1967 顆星的星表"中,也載有恒星归算数,但仅有化算赤緯的归算数。这些归算数載在右边奇数頁上,其中第一欄重載星表中的恒星編号,其余各欄則載出各归算数及其周年变化,并附有符号,其順序为:

$$a', \Delta a', b', \Delta b', c', \Delta c', d', \Delta d'.$$

a' 以度秒表示，b', c', d' 为不名数，而周年变化 $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$ 及 $\Delta d'$ 是以这些量的最后一位为單位而載出的。这些周年变化的符号："+"表示相应量随时間而增加，"−"則表示随时間而减小。

所有这些归算数都是就星表历元 1950.0 計算的；因此还必須用周年变化將其化算至观測年历元。

当需要对同一类星算出一系列的視位置时，采用(247)式是特別方便的。在采用(247)式时，一切計算通常都用計算机进行。

现在我們来推导**三角式的視位置化算公式**，这种公式叫做第**二类視位置化算公式**。

为此，根据岁首平坐标計算观測瞬間真坐标的公式同样采用(245′)式表示的三角式；为了計算周年光行差的影响，则采用(214)式的三角式，并將它們改写为：

$$\alpha_{視}-\alpha_{眞}=h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0,$$
$$\delta_{視}-\delta_{眞}=h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0+i\cos\delta_0.$$

用相应的公式(245′)代入上式中的各項，则得：

$$\begin{aligned}\alpha_{視}=\alpha_0+f+g\sin(G+\alpha_0)\operatorname{tg}\delta_0+h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0+\\+f'+g'\sin(G'+\alpha_0)\operatorname{tg}\delta_0+\mu_\alpha\tau,\end{aligned}\qquad(250)$$
$$\begin{aligned}\delta_{視}=\delta_0+g\cos(G+\alpha_0)+h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0+i\cos\delta_0+\\+g'\cos(G'+\alpha_0)+\mu_\delta\tau.\end{aligned}$$

这就是**第二类的視位置化算公式**或叫**三角式**。按这种公式来进行計算，大部分使用对数表。在(250)式中的第一式是用来計算視赤經 $\alpha_{視}$ 的，所以所有各量应以时單位表示；其中 f, g, h 及 g' 应以时秒表示。(250)式中的第二式是用来計算視赤緯 $\delta_{視}$ 的，所以所有各量应以度單位表示，而 g, h, i 及 g' 应以弧秒表示。

由于在"苏联天文年历"中也載有第二类归算数（参閱"1953年的苏联天文年历"第 124—131 頁），因此按(250)式进行化算計算是極为簡便的。这种表的結構与第一类归算数表的結構稍有不

同，而标题则同样是“1953年归算数表”。但必須特别注意的是，第二类归算数的記載，是每日一載，而以格林尼治民用日的开始时即世界时0^h为准。

第二类归算数表中所載：

第一欄——日期，即月，日；

第二欄——τ，即由岁首到每一表列瞬間的年的小数，記載至万分之一年；

第三欄——f，以时秒表示，記載至千分之一时秒；

第四欄——$\log g$，四位对数，而以度秒表示；

第五欄——G，以小时和分表示，精确到$0^m.1$；

第六欄——$\log h$，四位对数，h也是以度秒表示；

第七欄——H，同G一样，精确到$0^m.1$；

第八欄——$\log i$，四位对数；

第九欄——i，以度秒表示，精确到$0''.001$，并附有符号；

第十欄——f'，以时秒表示，以小数点后的第三位为單位，即記載至$0^m.001$，并附有符号；

第十一欄——g'，以度秒表示，以小数点后的第二位为單位，即記載至$0''.01$，并附有符号；

第十二欄——G'，以小时表示，精确到$0^h.1$。

由于表中的g和h，如上所述，是以度秒表示的，故根据上述的理由，当計算乘积

$$g\sin(G+\alpha_0)\operatorname{tg}\delta_0 \text{ 及 } h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0$$

时，必須附上一个化算因子$\frac{1}{15}$。

当要計算恒星在某一瞬間的視位置时，采用(250)式較为方便。

还应該指出，在上述所有的归化計算中，采用黃道平太陽的黃經为$280°$，而赤道平太陽的赤經为$18^h\,40^m$的那一瞬間作为岁首。

从这一瞬間开始起算的年叫做假年。按时間長短来說，一假年正好等于一回归年，即等于 365.2422 个平太陽日。它的开始总須与历年的开始相接近，但同时对整个地球来說，其开始是在同一瞬間的。这就是假年的优点。

上面曾不只一次的指出过，一般的归算公式仅仅对那些不太靠近天極的星才有足够的精度。因此对近極星(δ 80°)就必須按严密的公式进行視位置的化算，这些公式可由相应的球面三角形的研究中导出。但在此最好采用法布里蔡斯近似公式或法布里蔡斯改正，因为它們对二次項的計算非常精确。由于这些公式是普尔柯沃天文学家 B. 法布里蔡斯于 1876 年最先导出的，所以以他命名。后来，法布里蔡斯担任基輔大学的天文学敎授，并于 1886 年在該大学的"消息"报上發表了关于"等高观測"的論文。这一論文在当时是有它的現实意义的。

删掉法布里蔡斯公式中对我們沒有什么用处的結論，就可把这些公式改变成下列形式：

$$
\begin{aligned}
\alpha_{视}-\alpha_0 &= \Delta\alpha^s+\Delta\alpha^s\Delta\delta''\sin 1''\,\mathrm{tg}\,\delta_0,\\
\delta_{视}-\delta_0 &= \Delta\delta''-\frac{1}{2}15^2\sin 1''\cdot(\Delta\alpha^s)^2.
\end{aligned}
\tag{251}
$$

(251)式中的第二項，就是法布里蔡斯改正数。$\Delta\alpha^s$ 和 $\Delta\delta''$ 是按(247)式或(250)式算出的視位置的归算数；同时 $\Delta\alpha^s$ 显然是以时秒表示的，而 $\Delta\delta''$ 是以度秒表示的。当 δ 大于 80° 而归算数 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 之值約为 10″ 时，則必須加法布里蔡斯改正数。

例

(1)試按"1953 年的苏联天文年历"用第一类公式(代数式)，計算出 1953 年 6 月 24 日基塔布恒星时瞬間 $s=8^h11^m$ 武仙座 52 号星的視坐标。基塔布的經度 $\lambda=$ $=4^h28^m$E。

由"1953 年的苏联天文年历"中查得武仙座 52 号星在 1953 年岁首时的平坐标及

其自行(参閱該年历第143頁,№403):

$$\alpha_{1953.0}=16^h47^m51^s.528,$$

$$\mu_\alpha=\qquad+0^s.0022,$$

$$\delta_{1953.0}=+46°3'51''.25,$$

$$\mu_\delta=-0''.062.$$

采用(247)式作为实用公式。

首先用計算和圖解(圖113)来确定內插間距:

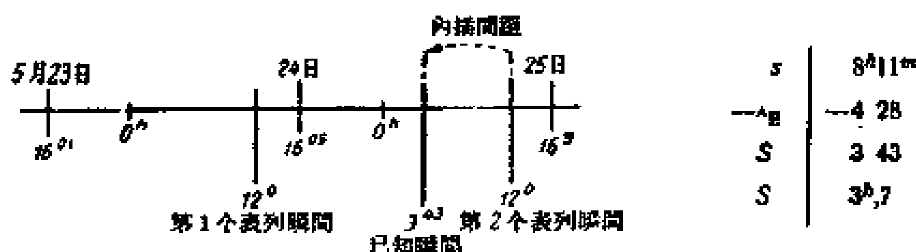


圖 113.

由"1953年的苏联天文年历"的"太陽"表(第12頁)內査得5月23日、24日和25日格林尼治平子正的恒星时:

5月23日	$S_0=16^h1^m$,
24日	$S_0=16\ \ 5$,
25日	$S_0=16\ \ 9$.

用下述方法作圖(参閱圖113)。在任一直綫上,按适当的比例标出5月23日及5月24日,在每一日的起点上写上S_0,求出每一日恒星时零点的位置,并將兩相鄰表列瞬間(恒星时 12^h)和位于其間的已化为格林尼治恒星时的已知瞬間繪于圖上。

在圖上可以看出,位于5月23日和24日兩表列瞬間間的瞬間,它接近于24日的表列瞬間。現在我們来計算內插間距:

第二表列瞬間	$12^h.0$
已知瞬間	$3\ .7$
內插間距	$8\ .3$

因而,我們將从5月24日向后內插于$8^h.3$。茲計算內插因子n:

$$n=\frac{-8^h.3}{24^h}=-0.346.$$

因为是向后內插,所以附以(−)号。用此內插因子,內插出我們所需要的第一类归算数,首先是τ,并不进行內插而求出E值(見141頁)。

τ	$0^a.3938$
$A+A'$	$+0.6436$
$B+B'$	$-5''.268$
C	$-8''.527$
D	$-18''.238$
E	$+0^s.0020$

由“1958年的苏联天文年历”(303頁)查出武仙座52号星(№ 408)的归算常数(不用內插法):

a	$+1^s.7548$
b	-0.0214
c	-0.0298
d	-0.0014

a'	$-6''.2049$
b'	$+0.9509$
c'	$+0.9857$
d'	-0.2229

根据(247)式編出下列計算格式,用計算机进行相乘,并逐一填写于格式中:

$\mu_\alpha\cdot\tau$	$+0^s.0009$
$(A+A')\cdot a$	$+1.1294$
$(B+B')\cdot b$	$+0.1127$
$C\cdot c$	$+0.2541$
$D\cdot d$	$+1.6670$
E	$+0.0020$
$\alpha_{視}-\alpha_0$	$+3^s.1661$

$\mu_\delta\cdot\tau$	$-0''.0244$
$(A+A')\cdot a'$	-3.9935
$(B+B')\cdot b'$	-5.0093
$C\cdot c'$	-8.4051
$D\cdot d'$	$+4.0653$
$\delta_{視}-\delta_0$	$-13''.3670$

相加,得归算数$(\alpha_{視}-\alpha_0)$及$(\delta_{視}-\delta_0)$,因此归算数按下列格式計算武仙座52号星在已知瞬間的視坐标。

α_0	$16^h47^m51^s.528$
$\alpha_{視}-\alpha_0$	$+\quad 3\ .166$
$\alpha_{視}$	$16^h47^m54^s.694$
δ_0	$+46°\ 3'\ 51''.25$
$\delta_{視}-\delta_0$	$-\quad 13\ .37$
$\delta_{視}$	$+46°\ 3'\ 37''.88$

(2) 試按“1953年的苏联天文年历”用第二类公式求出1953年5月24日基塔布恒星时瞬間 $s=8^h11^m$ 武仙座52号星的視坐标。基塔布的經度 $\lambda=4^h8^m$E。

由“1953年的苏联天文年历”中(143頁，№408)查出武仙座52号星在1953年岁首的平坐标及其自行：

$$\alpha_{1953.0}=16^h47^m51^s.528,$$
$$\mu_\alpha=+0.0022,$$
$$\delta_{1953.0}=+46°3'51''.25,$$
$$\mu_\delta=\ -0.062.$$

采用(250)式作为实用公式。

首先將已知瞬間 s 化算为格林尼治子午圈时：

s	8^h11^m
$-\lambda_E$	$-4\ 28$
S	$3\ 43$

由“1953年的苏联天文年历”的“太陽”表中(12頁)查得1953年5月23日、24日及25日格林尼治平子正的恒星时：

5月23日	$S_0=16^h1^m,$
5月24日	$S_0=16\ 5,$
5月25日	$S_0=16\ 9.$

按前述的方式作圖(圖114)，在圖上标出兩个相鄰表列瞬間(世界时 0^h)及其間的已知瞬間 S。

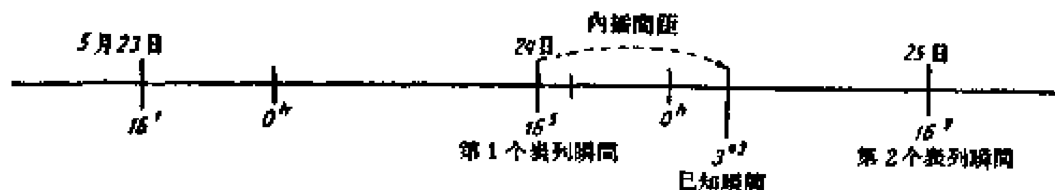


圖 114.

根据圖解确定，必須从5月24日(由第一个表列瞬間)向前进行內插，用一般的方法求得內插間距和內插因子 n：

已知瞬間	3^h43^m
第一表列瞬間	16 5
内插間距	$11^h38^m=11^h.6$

为了能够相减，对已知瞬間(心算)加上24^h。換句話說就是已知瞬間和表列瞬間都从同一零点起算，即从5月23日0^h时起算：

$$n=\frac{11^h.6}{24^h}=0.483.$$

現在我們按"天文年历"的表内插第二类归算数和τ:

τ	$0^a.3938$
f	$1^s.989$
$\lg g$	1 .1449
G	$22^h32^m.7$
$\lg h$	1 .3039
H	$13^h40^m.3$
$\lg i$	$0\ .5679_n$
i	$-\ 3''.698$
f'	$-\ 0^s.009$
g'	$+\ 0''.10$
G'	$15^h.5$

計算輔助角：$(G+\alpha_0)(H+\alpha_0)$及$(G'+\alpha_0)$。

G	$22^h32^m.7$	H	$13^h40^m.3$	G'	$15^h.5$
α_0	16 47 .9	α_0	16 47 .9	α_0	16 .8
$G+\alpha_0$	$15^h20^m.6$	$H+\alpha_0$	$6^h28^m.2$	$G'+\alpha_0$	$8^h.3=124°30'$

为了便于以后的計算和編制格式，茲將(250)式改写成如下之形式:

$$\alpha_{視}=\alpha_0+f+I+II+III+f'+\mu_\alpha\tau,$$

$$\delta_{視}=\delta_0+I'+II'+III'+i\cos\delta_0+\mu_\delta\tau,$$

式中：

$$I=\frac{1}{15}g\sin(G+\alpha_0)\operatorname{tg}\delta_0,\qquad I'=g\cos(G+\alpha_0);$$

$$II=\frac{1}{15}h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0,\qquad II'=h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0;$$

$$III=\frac{1}{15}g'\sin(G'+\alpha_0)\operatorname{tg}\delta_0,\qquad III'=g'\cos(G'+\alpha_0).$$

为此，編制計算格式进行計算:

$\delta = +46°3'.9$

I	$-0^s.7416$
$\lg I$	$9.87\ 02_n$
$\lg \frac{1}{15}$	$8.82\ 39$
$\lg \operatorname{tg} \delta_0$	$0.01\ 62$
$\lg \sin(G+\alpha_0)$	$9.88\ 52_n$
$\lg g$	$1.14\ 49$
$\lg \cos(G+\alpha_0)$	$9.80\ 67_n$
$\lg I'$	$0.95\ 16_n$
I'	$-8''.946$

II	$+1^s.920$
$\lg II$	$0.28\ 33$
$\lg \frac{1}{15}$	$8.82\ 39$
$\lg \sec \delta_0$	$0.15\ 88$
$\lg \sin(H+\alpha_0)$	$9.99\ 67$
$\lg h$	$1.30\ 39$
$\lg \cos(H+\alpha_0)$	$9.08\ 90_n$
$\lg \sin \delta_0$	$9.85\ 74$
$\lg II'$	$0.25\ 03_n$
II'	$-1''.783$

檢查(用計算机)

III	$+0^s.00570$	III	$+0^s.00571$
$\lg III$	7.756	$\frac{1}{15}$	0.0667
$\lg \frac{1}{15}$	8.824	$\operatorname{tg} \delta_0$	1.039
$\lg \operatorname{tg} \delta_0$	0.016	$\sin(G'+\alpha_0)$	0.8241
$\lg \sin(G'+\alpha_0)$	9.916	g'	$+0''.10$
$\lg g'$	9.000	$\cos(G'+\alpha_0)$	-0.5664
$\lg \cos(G'+\alpha_0)$	9.753_n	III'	$-0''.0566$
$\lg III'$	8.753_n		
III'	$-0''.0566$		

檢査(用計算机)

$\lg i$	$0.56\ 79_n$	i	$-3''.698$
$\lg \cos \delta_0$	$9.84\ 12$	$\cos \delta_0$	$+0.6939$
$\lg i \cos \delta_0$	$0.40\ 91_n$	$i \cos \delta_0$	$-2''.566$
$i \cos \delta_0$	$-2''.565$		

$\mu_\alpha \tau$	$+0^s.0008664$
$\lg \mu_\alpha \tau$	6 .93 77
$\lg \mu_\alpha$	7 .34 24
$\lg \tau$	9 .59 53
$\lg \mu_\delta$	8 .79 24
$\lg \mu_\delta \tau$	8 .38 77
$\mu_\delta \tau$	$-0''.02442$

α_0		$16^h47^m51^s.528$
f	+	1 .989
I	−	0 $.741_6$
II	+	1 .920
III	+	0 $.005_7$
f'	−	0 .009
$\mu_\alpha \tau$	+	0 $.000_9$
$\alpha_{視}$		$16^h47^m51^s.693$

δ_0		$+46°3'51''.25$
I'	−	8 $.94_6$
II'	−	1 $.78_2$
III'	−	0 $.05_7$
$i \cos \delta_0$	−	2 $.56_5$
$\mu_\delta \tau$	−	0 $.02_4$
$\delta_{視}$		$+46°3'37''.88$

这些归算数和求得的視位置与上例中(見例1)所求得的在計算精度之限度內是相符的。

(3)試按“2957顆星的的星表”中的恒星归算常数表(見附录4)，求出2010号星在1953年5月24日基塔布恒星时瞬間 $s=8^h11^m$ 的視位置归算数。基塔布經度 $\lambda=$ $=4^h28^m$E。

首先，由星表中查出2010号星的一切归算常数及其周年变化，再查出自行 μ 及其百年变化。根据附注(第30欄)和坐标的相同，我們断定此星同样是上二例中的武仙座52号星。由于“2957顆星的星表”的历元为1950.0，故应將三年內的改正数加入归算数中，并將修正后所得的归算常数記入下面的格式中的第三欄內:

	1950	Δ	1953
a	$+1^s.755$	$+0.1$	$+1^s.755$
b	$-0\ .0214$	$+0.1$	$-0\ .0214$
c	$-0\ .0298$	$+0.1$	$-0\ .0298$
d	$-0\ .0914$	0.0	$-0\ .0914$
μ_α	$+0^s.0022$	$+1$	$+0^s.0022$
a'	$-6''.212$	$+2.5$	$-6''.204$
b'	$+0\ .9507$	$+0.4$	$+0\ .9508$
c'	$+0\ .9856$	$+0.2$	$+0\ .9857$
d'	$-0\ .2232$	$+1.0$	$-0\ .2229$
μ_δ	$-0''.062$	0	$-0''.062$

現在我們来內插各归算数：$(A+A')$，$(B+B')$，C和D。为此，將已知瞬間s化为格林尼治子午圈时，作圖（参閱圖114），計算內插間距及內插因子：

s	8^h11^m
$-\lambda_E$	$-4\ 28$
S	$3\ 43$

第二表列瞬間	$12^h\ 0^m$
已知表列瞬間	$3\ 43$
內插間距	$8^h17^m=8^h.3$

內插因子 $n=\dfrac{-8^h.3}{24^h}=-0.346$。

式中附有(－)号，其原因可由圖中（圖114）看出，这是因为已知瞬間S靠近第二表列瞬間而应采用向后內插的緣故。

其次，按"1953年的苏联天文年历"（119頁），从5月24日向后插出τ，$(A+A')$各数，并查出E之值：

τ	$0^a.3938$
$A+A'$	$+\ 0\ .6436$
$B+B'$	$-\ 5''.268$
C	$-\ 8''.527$
D	$-18''.238$
E	$+\ 0^s.0020$

按照(247)式，編制格式填写：

$\mu_\alpha T$	$+0^s.0009$
$(A+A')a$	$+1\ .1295$
$(B+B')b$	$+0\ .1127$
Cc	$+0\ .2541$
Dd	$+1\ .6670$
E	$+0\ .0020$
$\alpha_{視}-\alpha_0$	$+3^s.1662$
$\alpha_{視}-\alpha_0$	$+3\ .166$
$\mu_\delta T$	$-0''.0244$
$(A+A')a'$	$-3\ .9929$
$(B+B')b'$	$-5\ .0088$
Cc'	$-8\ .4051$
Dd'	$+4\ .0653$
$\delta_{視}-\delta_0$	$-13''.3665$
$\delta_{視}-\delta_0$	$-13''.37$

于是，我們按"2957 顆星的星表"所求得的归算数与按"苏联天文年历"所算的同一恒星(武仙座 52 号星)的归算数在計算精度限度內是相符的(参閱(1)、(2)，兩例)。

(4)試按"1967 顆星的星表"(1948 年版)，計算 1215 号星在 1953 年 5 月 24 日塔什干恒星时瞬間 $s=8^h20^m$ 的視赤緯。塔什干的經度 $\lambda=4^h3\cdot{}^m$E。

首先，按"1967 顆星的星表"，算出 1215 号星的恒星归算常数(参閱該星表中的 59 頁)，并查出赤緯的自行 μ_δ，在該星表中以 μ' 表示(見 58 頁)。为此，由表中查出 a'，b'…之值及其在星表历元(1950.0)时的周年变化，并算出 1953 年岁首的 a'，b'…之值。

	1950	Δ	1953
a'	$-11\ .216$	$+3.5$	-11.206
b'	$+0\ .8287$	$+1.1$	$+0.8290$
c'	$+0\ .6403$	-0.1	$+0.6403$
d'	$-0\ .1503$	$+0.7$	-0.1501
μ_δ	$-0''.048$		

茲將觀測瞬間 s 化为格林尼治子午时。

s	8^h20^m
$-\lambda_{時}$	$-4\ 37$
S	3^h43^m

作圖(参閱圖114)，計算內插間距和內插因子:

第二表列瞬間	12^h0^m
已知瞬間	3 43
內插間距	$8^h17^m=8^h.28$

內插因子 $n=\frac{-8^h.3}{24^h}=-0.345$。

式中之所以附有(−)号，正如在圖(参閱圖 114)中所看到的那样，是因为向后內插的緣故。

現在我們来按"1953 年的苏联天文年历"(119 頁)，內插出第一类归算数。此时，我們也要單独內插出 A' 和 B'，并由和数$(A+A')$及$(B+B')$中求出 A 及 B，以便將来有可能分別計算長周期章动項和短周期章动項。茲用內插因子 −0.345 从 5 月24日向后內插：

τ	$0^a.3938$
$A+A'$	+ 0 .6436
A'	− 0 .0030
A	+ 0 .6466
$B+B'$	− 5″.267
B'	− 0″.077
B	− 5″.190
C	− 8″.527
D	−18″.238

根据(247)式中的第二式，計算此归算公式中的各項，并將它們相加便得屬于該星赤緯的視位置归算数，同时單独算出短周期章动項的改正数：

$\mu_\delta\tau$	− 0″.0189
Aa'	− 7″.2458
Bb'	− 4 .3025
Cc'	− 5 .4598
Dd'	+ 2 .7375
$\delta_{視}-\delta_0$	−14″.2895

$A'a'$	+ 0.0336
$B'b'$	− 0.0638
短周期章动	+ 0 .0302

同一顆巨蛇座周于 "1967 顆星的星表" 为 № 1215，在 "2957 顆星的星表" 中为 № 1883，而在"苏联天文年历"內的星表中为 №378，其1953 年岁首的平赤緯已在上节(参閱 § 69 例(2))按"1967 顆星的星表" 算出。从上例中抄下此赤緯，而以 δ_0 表示，并加上視位置归算数(不計短周期章动項)，以便求得已知瞬間的視赤緯：

δ_0	$+15°34'\ 3''.60$
$\delta_{視}-\delta_0$	$-\quad 14''.29$
$\delta_{視}$	$+15°33'49''.31$

如果再加上短周期章动項($-0''.03$)的影响,则最后得:

$$\delta_{視}=+15°33'49''.28.$$

巨蛇座周在已知瞬間的視赤緯,我們早已按"1953年的苏联天文年历"中的"視位置表"用簡易内插法算出来了(参閱§68例(3))。

我們剛才按視位置的化算公式所求得的結果与用綫性內插法求得的結果只差$0''.01$。应注意到,在本节最后的这一例中計算巨蛇座周的視赤緯时,我們將長周期章动和短周期章动的影响分开了,而短周期章动的影响是單独計算的。我們这样做是为了能够將所得的結果与按"視位置"表內插所得的結果比較。此視位置表中,是沒有計入短周期章动項影响的。我們知道,在必要的情况下,短周期章动的影响按下列二式單独地計算:

$$\alpha \text{ 的短周期章动}=A'a+B\,b,$$

$$\delta \text{ 的短周期章动}=A'a'+B'b'.$$

为了便于这一計算,在"視位置"表中每一欄的下面对每顆恒星都載有恒星归数常数 a, b 和 a', b' 之值。同时,a 和 a' 載至0.1,而 b 和 b' 載至0.01。

如果我們由"1953年的苏联天文年历"(346頁)查出 a', b' 之值:

$$a'=-11''.2,\qquad b'=+0.83;$$

而由該"年历"的相应表內(119頁)插出在已知瞬間的短周期归算数 A' 和 B' 之值:

$$A'=-0.0030,\qquad B'=-0''.077;$$

則計算巨蛇座周的赤緯短周期章动項,采用下面的形式:

$A'a'$	$+0''.034$
$B'b'$	$-0''.064$
短周期章动	$-0''.03$

即在計算精度的限度內,求得与上相同的結果。同时,这种相乘完全可以用对数計算尺进行,然而通常簡單地用心算进行。

总結在例中所述,可作出下面的实际結論:

1. 若需要計算在"苏联天文年历"中只載有其平位置的恒星的視坐标,則应用載于該"年历"第302—303頁中的恒星常数,按第一类公式(用計算机)进行計算最为方便。

2. 若要对"苏联天文年历"中沒有載出的恒星的視坐标进行

計算，則应用“2957 顆星的星表”来計算最为方便。

3. 若只需要求得恒星的視赤緯，应用“1967 顆星的星表”最为方便。

4. 最后，若只需計算短周期章动項的影响，則直接根据附有恒星常数的“苏联天文年历”求之較为方便，恒星常数自“視位置”表（149—301 頁）查得。

第八章　补充材料

§71. 由第一天球坐标系化算至第二及第三天球坐标系[①]

天文测量員有时由于需要或錯誤而观测了一顆不知其名称的星。为了以后的計算，必須核对这一顆星，也就是要确定他所观测的究竟是甚么星；只有这样，才能使他在当年的"苏联天文年历"中查得此星的赤道坐标，而精度达到以后計算的要求。若已知观测地的緯度(那怕是近似的也好)，并由观测中求得恒星天頂距及其方位角的近似値，則可算出其近似赤緯和时角。同时，若能近似地推算出观测瞬間的恒星时，便可求得同样精度的赤經。若已知恒星的赤經 α 和赤緯 δ (那怕是近似的也好)，則可按"天文年历"核对此星，并依所需精度求出其赤道坐标。

于是，可把問題写成下列款式：已知在緯度为 φ 的某地方恒星时瞬間 s 的某星的地平坐标 z 和 A，求此星在此瞬間的时角 t 和赤道坐标 α 和 δ。

在定位三角形 $PZ\sigma$(圖 34)中已知其边为：

$$PZ=90^\circ-\varphi,\quad Z\sigma=z$$

及其夾角为

$$\angle PZ\sigma=180^\circ-A.$$

將天文公式組应用于 $P\sigma=90^\circ-\delta$ 和 $\angle ZP\sigma=t$，便可写出：

$$\sin\delta=\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos A, \tag{I}$$

$$\cos\delta\sin t=\sin z\sin A, \tag{II}$$

---

① 第三章 §20 的补充。

$$\cos\delta\cos t=\cos\varphi\cos z+\sin\varphi\sin z\cos A. \tag{III}$$

以 II 式除 III 式得:

$$\operatorname{ctg} t=\frac{\cos\varphi\cos z+\sin\varphi\sin z\cos A}{\sin z\sin A},$$

或

$$\operatorname{ctg} t=\cos\varphi\operatorname{ctg} z\operatorname{cosec} A+\sin\varphi\operatorname{ctg} A. \tag{a}$$

以 II 式除 I 式得:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin t}=\frac{\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos A}{\sin z\sin A},$$

由此得:

$$\operatorname{tg}\delta=(\sin\varphi\operatorname{ctg} z\operatorname{cosec} A+\cos\varphi\operatorname{ctg} A)\sin t. \tag{б}$$

公式(a)和(б)都便于用計算机計算。

为了用对数表計算，將公式 I—III 进行如下之改化。以 III 式除 II 式得:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin z\sin A}{\cos\varphi\cos z+\sin\varphi\sin z\cos A}.$$

以 $\sin z\cos A$ 除上式右边的分子及分母得:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\operatorname{tg} A}{\sin\varphi+\dfrac{\operatorname{ctg} z}{\cos A}\cos\varphi}.$$

按以下关系式采用补助角 M:

$$\operatorname{ctg} M=\frac{\operatorname{ctg} z}{\cos A}. \tag{в}$$

將(в)式代入上述 $\operatorname{tg} t$ 公式得:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\operatorname{tg} A}{\cos\varphi\operatorname{ctg} M+\sin\varphi},$$

或

$$\operatorname{tg} t=\frac{\operatorname{tg} A\sin M}{\cos\varphi\cos M+\sin\varphi\sin M},$$

最后得:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\operatorname{tg} A\sin M}{\cos(\varphi-M)}. \tag{г}$$

今以 III 式除 I 式得:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}=\frac{\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos A}{\cos\varphi\cos z+\sin\varphi\sin z\cos A},$$

以 $\sin z\cos A$ 除上式右边的分子及分母得:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}=\frac{\sin\varphi\dfrac{\operatorname{ctg}z}{\cos A}-\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{\operatorname{ctg}z}{\cos A}+\sin\varphi}.$$

采用(в)式中的同一輔助角 M 得:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}=\frac{\sin\varphi\operatorname{ctg}M-\cos\varphi}{\cos\varphi\operatorname{ctg}M+\sin\varphi},$$

或
$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}=\frac{\sin\varphi\cos M-\cos\varphi\sin M}{\cos\varphi\cos M+\sin\varphi\sin M}=\frac{\sin(\varphi-M)}{\cos(\varphi-M)},$$

即
$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}=\operatorname{tg}(\varphi-M),$$

由此得
$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}(\varphi-M)\cos t. \tag{д}$$

于是,在用对数表解算本問題时,其实用公式为(в)、(г)和(д)三式。

按公式(а)和(б)或公式(в)、(г)和(д)进行計算时,必須遵守类似于在§20中所提出的化第二天球坐标系为第一天球坐标系的規定。

求出时角 t 之后,便可按下列公式計算赤經 α:

$$\alpha=s-t. \tag{е}$$

例

在緯度 $\varphi=55°46'$ 的某地地方恒星时瞬間 $s=11^h31^m.7$ 时,观測了某一不知其名称的星的天頂距及其方位角,得到的結果为:

$$z=40°58',\quad A=289°59'.$$

核对此星。

根据公式(в),(г),(д)和(е),在下列格式上进行計算:

z	40°58′
A	289 59
lg ctg z	0.06 26
lg sec A	0.46 68
lg ctg M	0.52 89
M	16°29′
φ	55 46
$\varphi-M$	39 17
....	....
lg tg A	$0.43\ 93_n$
lg sin M	9.45 29
lg sec$(\varphi-M)$	0.11 12
lg tg t	$0.00\ 34_n$
t	$20^h59^m.1$
s	11 31 .7
α	14 32 .6
....	....
lg tg$(\varphi-M)$	9.91 28
lg cos t	9.84 78
lg tg δ	9.76 06
δ	+29°57′

于是，此星的赤道坐标为：

$$\alpha=14^h32^m.6;\quad \delta=+29°57'.$$

按"1953 年的苏联天文年历"(142 页，№ 351)，查得此星为牧夫座梗河二。

§ 72. 日月的升沒[1]

在大規模作業的某些場合下，必需計算日、月升沒的瞬間及其升沒点的方位角，而这种計算与对恒星的类似計算有很多差别。

第一，太陽光最后消逝于地平綫上的瞬間被認为是日沒的瞬間；換句話說，在那一瞬間在地平上的不是太陽的中心，而是其視面的上緣。同时，正当太陽光最初露出的瞬間乃視为是日出的瞬間。因为太陽視面的視角半徑 R 平均約为 16′，所以太陽視面中心

[1] 补充第三章 § 23。

在日出和日沒瞬間的天頂距等于 $90°+16'$。又因为在"苏联天文年历"中載有太陽中心的赤緯，所以我們在进行上述的計算时应采用 $z=90°16'$。

对于月亮來說，也是这样。因为月亮視面的視角半徑平均等于太陽視面的視角半徑，所以月亮中心在其升沒瞬間的天頂距也为 $z=90°16'$。

第二，在計算日月升沒时，必須顧及蒙气差对它們天頂距的影响。当然，蒙气差对恒星的天頂距也同样是有影响的，但由于光綫被下面的密度大透光弱的大气層所吸收的緣故，星在地平綫上及接近地平綫时就看不見了。星在其天頂距为 $88°$ 时，由于光綫被大气吸收的緣故，看起來其亮度較在天頂时小 3.5 星等。因此，精确地計算恒星出沒的条件是沒有实际意义的。

在地平綫上的蒙气差平均为 $34'$—$35'$。天体因蒙气差而升高了，所以太陽或月亮視面的上緣，在升沒瞬間的天頂距实为 $90°+$ $+35'$。其中心天頂距則为 $90°+16'+35'=90°51'$。

第三，太陽，月亮有地平視差（周日視差）：

$$P_{\odot}=0'.\overline{15};\quad p_{\text{☾}}=57' \text{（平均数）。}$$

因为在"天文年历"中所載的为太陽和月亮的地心坐标，故在計算它們的升沒时，必須采用其地心天頂距，即必須顧及視面半徑和蒙气差，假設：

$$z=90°+R_{\odot}+\rho+p. \tag{a}$$

就太陽而言，若計算精度只取至 $1'$，則視差的影响可以忽視。

于是，我們的問題之解算，采取下述程序。已知数据为：观測地的緯度 φ，天体的赤緯 δ 及天頂距 z。天頂距按(a)式計算：太陽的天頂距 $z_{\odot}=90°51'$，月亮的天頂距 $z_{\text{☾}}=89°54'$。

观察一下天体的定位三角形，便可看出，三个边尽都是已知

的，即：

$$PZ=90^\circ-\varphi,\quad P\sigma=90^\circ-\delta,$$
$$Z\sigma=z.$$

为了用計算机計算，由下式

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$$

求得
$$\cos t=\sec\varphi\sec\delta\cos z-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta. \tag{б}$$

同样由公式

$$\sin\delta=\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos A$$

求得
$$\cos A=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}z-\sin\delta\sec\varphi\operatorname{cosec}z. \tag{в}$$

于是求得沒时的时角及方位角：

$$t_{沒}=t,\quad A_{沒}=A,$$

及升时的时角及方位角：

$$t_{升}=24^h-t,\quad A_{升}=360^\circ-A,$$

式中 t 和 A 为这些角分别按(б)、(в)兩式求得的最小值。

为了用对数表計算，采用半角公式較为方便。为此，首先采用下列符号：

$$\Delta=90^\circ-\delta,\quad \Phi=90^\circ-\varphi;$$
$$a=180^\circ-A,\quad p=\frac{1}{2}(z+\Delta+\Phi),$$
$$M=\sqrt{\frac{\sin(p-z)\sin(p-\Delta)\sin(p-\Phi)}{\sin p}}.$$

此时
$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{M}{\sin(p-z)}, \tag{г}$$
$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{M}{\sin(p-\Delta)}, \tag{д}$$
$$\operatorname{tg}\frac{q}{2}=\frac{M}{\sin(p-\Phi)}.$$

計算 $\operatorname{tg}\frac{q}{2}$ 是为了检查各項計算时可以采用下列检查公式：

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{q}{2}=\frac{M}{\sin p}.$$

其次，求出天体沒时的时角及方位角：

$$t_{沒}=t;\quad A_{沒}=180^\circ-a,$$

及升时的时角及方位角：

$$t_{升}=24^h-t,\quad A_{升}=180^\circ+a,$$

式中 t 和 a 系分别由(Г)和(Д)兩式求得，幷視 M 式內根号前的符号为正号(+)。

在計算太陽的升沒时，所得时角在数値上分别等于升沒时的眞太陽时，卽：

$$t=t_{\odot}.$$

知道了 $t_{\odot}$，便可按已知的公式計算升沒时的民用时，区时及法定时。

对于月亮，首先必須根据时角 t 和赤經 α 按下式

$$s=\alpha+t$$

求出恒星时，然后按已知的公式將它换算为民用时或其他时。

第四，在所有这些計算中，必須顧及到这样的情况，卽太陽的坐标，特别是月亮的坐标是隨时間而变的。因而，为了要使日沒或月落的計算具有足够的精度，必須首先內插出此天体沒落（或升起）瞬間的 α 及 δ。但这一瞬間尙未知道。因此，必須按逐漸趨近法解决这一問題。首先采用鄰近表列日期的 α 和 δ 而無需任何內插，幷用这些数値按§23中的公式計算天体沒（或升）的近似瞬間。然后，按此瞬間內插出 α 和 δ；对太陽而言，按每时变量內插公式进行，而对月亮而言則按高次差內插公式进行。用由这种方法求得的 α 和 δ，按本节的公式分别进行升及沒的有关計算。

第五，若观測者位于离地面或海水面較高的地方，如在舺船的桅杆上、在山上或在飞机上，或需特别精确計算时，則必須顧及所謂地平"下降"或地平傾度 n，此地平傾度可按下列近似公式計算：

$$n=1'.78\sqrt{H},$$

式中 H 为观測者离地面或海水面的高度，以公尺表示。为了更精确地計算此量，备有專門用表①。仅举例如下：

$$在 H=3 公尺时，n=3',$$

$$在 H=3000 公尺时，n=1^\circ 37'.$$

地平下降的影响，就是站在高于地面（或海面）某点的观測者所見之視地平比数学地平或天文地平要低一个 n 角。因此，在他看来，天体的升比数学上的升要發生得早一些，而沒則晚一些，这样，在視升或視沒瞬間的天体中心的天頂距公式(a)应改写为：

$$z=90^\circ+R_{\odot}+\rho-p+n. \tag{e}$$

对于精确到 1^m 的太陽和月亮的升沒瞬間的計算，在"苏联天文年历"中載有簡便的表，属于太陽的載于 396—403 頁內，属于月亮的載于 404—410 頁內。

在太陽的升沒表中，其偶数頁上每隔五天載出太陽上緣(已顧及蒙气差)在格林尼治子午綫上的升起瞬間；在奇数頁上載其沒落瞬間。这种瞬間系按緯度列出，自 $+30^\circ$ 起到 $+70^\circ$ 止，每隔 2° 一載。因为表差不大，所以对經度的改正也很小；經度改正数仅在緯度大于 60° 时可能有較显著的数值，但不超过 1^m。为了求得中間日期和中間緯度的升沒瞬間，可按行按列进行簡易內插。在必要的場合下，为了求得經度改正数，必須將以小时表示的經度化为日的小数，对于东經按表向上內插，对西經則向下內插；太陽升沒瞬間按地方民用时求得。

例

按"苏联天文年历"中的表(396－403 頁)，求 1953 年 2 月 13 日在莫斯科太陽的升沒瞬間。

莫斯科的緯度 $\varphi=55^\circ.8$，經度 $\lambda=2^h30^mE$。

---

① 关于地平傾度更詳細的論述見航海和航空天文手册。

	升	沒
緯度 54°, 2 月 15 日 ……………………	7^h21^m	17^h9^m
对 2 月 13 日(兩天)的改正数 ……………	$+\ 4^m$	$-\ 4^m$
对緯度(1°.8)的改正数…………………	$+\ 4^m$	$-\ 5^m$
緯度 55°.8, 2 月13日 ……………………	7^h29^m	17^h0^m

月亮的升沒表由兩个独立的表組成。第一个表內，逐日載出下列各量:

第一行——日期;

第二行——月出瞬間;

第三行——观測者的經度(向西)变动 1 小时月升瞬間的变化 v;

第四行——由月升至鄰近的中天瞬間的时間段 t;

第五行——月沒瞬間;

第六行——观測者的經度(向西)变动 1 小时月沒瞬間的变化 v;

第七行——由鄰近的中天瞬間至月沒的时間段 t;

第八行——在世界时 0^h 时的月齡(日数表)。

月亮的升沒瞬間系就格林尼治子午圈和緯度 $\varphi=56°$ 算出的。要求出任何其他地点的月亮的升沒瞬間，必須將表列瞬間加上下述兩种改正数，即:

1) 經度改正数，此改正数为相应的每时变量 v 和所在地的經度 λ 所含的小时数之乘积。若为西經，此改正数的符号应为正;若为东經則应为負。

2) 緯度改正数，此改正数可按引数 t 和 φ 由第二个表內(408—410 頁)查出。此改正数的符号，对于月出如表所載，对月沒則反其符号。

月亮升沒瞬間，按地方民用时求得。

例

按"苏联天文年历"中的表(404 410頁),求1953年2月25日在莫斯科月亮的升沒时刻。

莫斯科的緯度 $\varphi=55^{\circ}.8$; 經度 $\lambda=2^h30^m$E。

	月升	月沒
1953年2月25日 ……………… t	8^h30^m	8^h42^m
表列瞬間 ………………	13^h43^m	$6^h\ 8^m$
經度改正数 ………………	$-\ 8^m$	$-\ 2^m$
緯度改正数 ………………	$+\ 1^m$	$-\ 1^m$
莫斯科瞬間 ………………	13^h36^m	6^h5^m

上述的这种表,其精度对于許多的实际应用上是足够了的。若需要更高的精度,則可將按表求得的瞬間当作第一近似瞬間,然后用这些瞬間按本节的公式(б)和(в)或(г)和(д)求其第二近似值。这兒,最好由"天文年历"中查取已知日的 R 及 p。

若除了瞬間以外,尙需計算升点和沒点的方位角,同样可以利用由这些表求得的瞬間。这种計算按§20中的(27)式或(34)式进行。

§73. 天頂距和方位角对于时間的二次导数[1]

在实用天文学的某些問題上,应用了有关天頂距和方位角对于时間(或时角)的二阶导数的公式。

为了推导这类公式,兹由§26录出一阶导数的公式(60)、(68)及(68′):

$$\frac{dz}{dt}=\cos\varphi\sin A, \tag{a}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}, \tag{б}$$

[1] 第三章§26的补充。

$$\frac{dA}{dt}=\sin\varphi+\cos\varphi\cos A\operatorname{ctg} z, \tag{в}$$

并將上式进行第二次微分。

微分(а)式得:

$$\frac{d^2 z}{dt^2}=\cos\varphi\cos A\frac{dA}{dt}.$$

將 $\frac{dA}{dt}$ 的表达式(б)代入上式,得:

$$\frac{d^2 z}{dt^2}=\frac{\cos\varphi\cos A\cos\delta\cos q}{\sin z}.$$

將 $\frac{dA}{dt}$ 的表达式(в)代入上式,則导数 $\frac{d^2 z}{dt^2}$ 的表达式呈下列形式:

$$\frac{d^2 z}{dt^2}=\cos\varphi\cos A(\sin\varphi+\cos\varphi\cos A\operatorname{ctg} z),$$

或
$$\frac{d^2 z}{dt^2}=\cos^2\varphi\cos A(\operatorname{tg}\varphi+\cos A\operatorname{ctg} z).$$

微分(в)式,并注意到 φ 不因 t 而变,則得:

$$\frac{d^2A}{dt^2}=-\cos\varphi\left(\sin A\operatorname{ctg} z\frac{dA}{dt}+\frac{\cos A}{\sin^2 z}\frac{dz}{dt}\right).$$

按(а),(б)兩式將 $\frac{dz}{dt}$ 和 $\frac{dA}{dt}$ 代入上式,得:

$$\frac{d^2A}{dt^2}=-\cos\varphi\left(\frac{\sin A\operatorname{ctg} z\cos\delta\cos q}{\sin z}+\frac{\cos A\cos\varphi\sin A}{\sin^2 z}\right),$$

或
$$\frac{d^2A}{dt^2}=-\frac{\cos\varphi\sin A}{\sin^2 z}(\cos z\cos\delta\cos q+\cos A\cos\varphi).$$

由定位三角形 $PZ\sigma$ 中,按五元素公式有:

$$-\cos\varphi\cos A=\sin\delta\sin z-\cos\delta\cos z\cos q,$$

由此得
$$\cos\delta\cos z\cos q=\sin\delta\sin z+\cos\varphi\cos A.$$

將此式代入 $\frac{d^2A}{dt^2}$ 的表达式中,最后得:

$$\frac{d^2A}{dt^2}=-\frac{\cos\varphi\cos A}{\sin^2 z}(\sin\delta\sin z+2\cos A\cos\varphi).$$

附录 I.

球面三角中的主要公式

I. 基本公式

若已知球面三角形 ABC(圖 115)的角为 A、B、C, 边为 a、b、c, 则它的这些元素应满足于下面的許多所謂的基本公式,即:

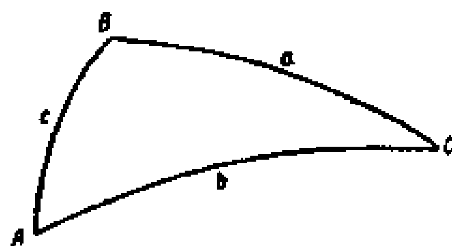


圖 115.

(a) 边的余弦公式

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

这一公式可以用文字表达为: 球面三角形边的余弦等于其他兩边余弦的乘积加上它們的正弦及它們夾角的余弦的連乘积。

(б) 正弦定律

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

即边的正弦与角的正弦成比例。这一公式經常写为另一种形式, 即:

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b.$$

此公式可用文字表达如下: 边的正弦与其鄰角正弦的乘积等于其所对角和对边的正弦的乘积。

(в) 五元素公式

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A,$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B,$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C,$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.$$

这一公式用文字表达是这样的：一边的正弦与其鄰角余弦的乘积等于此角对边的余弦与第三边正弦的乘积减去对边正弦、第三边余弦和它們夾角余弦的連乘积。

(r) 余切公式

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{ctg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{ctg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B,$$

$$\operatorname{ctg} b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \operatorname{ctg} B,$$

$$\operatorname{ctg} c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{ctg} C.$$

或用文字表达为：界边的余切与中間边正弦的乘积等于中間边和中間角余弦的乘积加上中間角正弦与界角余切的乘积。

2. 球面直角三角形的解算規則(納白尔-莫裘規則)

一球面直角三角形的直角为 A，銳角为 B 和 C，斜边为 a，直角边为 b 和 c，在其解算时可应用納白尔-莫裘規則。此規則可以这样記忆：中部的余弦等于其兩相鄰部余切之积；各部的余弦等于其不相鄰的兩并列部分正弦之积。

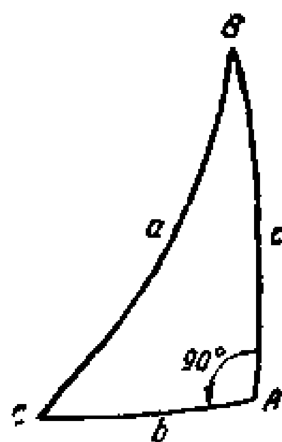


圖 116.

或簡述为：

球面三角形任一部的余弦或等于其鄰部余切之积，或等于其不相鄰部正弦之积。

同时必須注意：第一，在計算时直角未被采用，因此两直角边的銜接不应隔断；第二，直角边采用其余边代替。球面三角形各部的相互位置在顧及上面所指出的两点后，可用圖 117 加以表示。

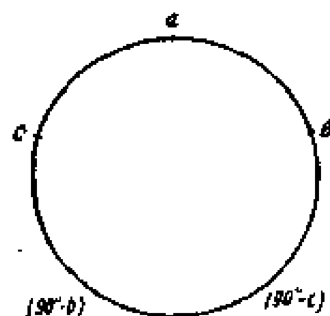


圖 117.

在解球面直角三角形时，应知其任意两部。此时，仅未知部分之一可以直接按納白尔-莫裘規則写出其公式；为了求其余两部中的每一部分，必須写出两已知部之一部的余弦公式。为了驗算，必須按納白尔-莫裘規則直接將所求的三部結合而構成一公式。

3. 半角公式

对于斜角球面三角形 ABC（見圖 115）可推导出下面几个半角正切公式：

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{M}{\sin(p-a)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{M}{\sin(p-b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{M}{\sin(p-c)},$$

式中
$$p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

即等于三角形 ABC 全周之半，而

$$M=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

已知三角形的三边，按上面的这些公式，可算出此三角形的三个角。为了驗算，可采用下列檢驗公式：

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{M}{\sin p}.$$

附录 II

各天文台的坐标

順序編号	点　　名	經　　度	緯　　度	附　　注
1	阿巴斯图曼尼（格鲁吉亞苏維埃共和国）	$2^h51^m18^s.08$E	$+41°45'18''.2$	
2	阿德雷德（澳大利亞）	9 14 19 .85E	−34 55 38 .0	国际緯度站
3	阿尔及尔	0 12 8 .53E	+36 48 4 .8	
4	雅典（希臘）	1 34 52 .06E	+37 58 19 .7	国家天文站
5	哈什哈巴德（土庫曼苏維埃社会主义共和国）	3 53 24 .6 E	+37 57 24	
6	毕尔多尔佛（德国）	0 40 57 .74E	+53 28 46 .9	
7	柏林-巴别尔斯别格（德国）	0 52 25 .49E	+52 24 24 .2	
8	波尔多（法国）	0 2 6 .60W	+44 50 7	波尔多大学天文台
9	布达佩斯（匈牙利）	1 15 51 .41E	+47 29 58 .6	国家天文台
10	布加勒斯特（罗多利亞）	1 44 23 .18E	+44 24 50	国家天文台
11	華沙（波蘭）	1 24 2 .37E	+52 13 21 .0	工艺專科学校天文台
12	華盛頓（美国）	5 8 15 .75W	+38 55 12 .8	航海天文台
13	維也納（奥地利）	1 5 21 .43E	+48 13 55 .1	維也納大学天文台
14	維尔紐斯（立陶宛苏維埃社会主义共和国）	1 41 8 .76E	+54 40 59 .1	
15	弗拉斯拉夫（波蘭）	1 8 21 .22E	+51 6 42 .1	
16	革但斯克（波蘭）	1 14 36 .5 E	+54 21 37 .9	
17	格伊捷尔士柏尔（美国）	5 8 47 .8 W	+39 8 13 .2	国际緯度站
18	柳波米尔山（波蘭）	1 20 15 .1 E	+49 46 5	
19	高尔基城（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	2 55 56 E	+56 15 32	国际緯度站
20	格林尼治（英国）	0 0 0 .00	+51 28 38 .2	格林尼治天文台
21	雅加达（印度尼西亞）	7 7 32 E	− 6 15 38 .5	国际緯度站
22	徐家匯（中国）	8 5 42 .89E	+31 11 31 .0	
23	佘山（中国）	8 4 44 .75E	+31 5 47 .6	
24	伊尔庫茨克（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	6 57 22 .71E	+52 16 44 .4	

續上表

25	喀山（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	3^h15^m 15^s.74E	+55°50′20″.2	格尔加德天文台
26	卡洛察(匈牙利)	1 15 54 .34E	+46 31 41 .7	
27	卡普(南非洲，好望角)	1 13 54 .60E	−33 56 2 .5	
28	卡尔洛佛特(撒丁島)	0 33 14 .9 E	+39 8 8 .9	国际緯度站
29	考納斯（立陶宛苏維埃社会主义共和国）	1 35 29 .50E	+54 53 44 .0	
30	基輔（烏克蘭苏維埃社会主义共和国）	2 2 0 .56E	+50 27 11 .8	基輔大学的天文台
31	基塔布（烏兹别克苏維埃社会主义共和国）	4 27 31 .7 E	+39 8 1 .7	国际緯度站
32	克盧日(罗馬尼亞)	1 34 23 .46E	+46 45 33 .8	
33	克拉科夫(波蘭)	1 19 50 .3 E	+50 3 52 .0	克拉科夫天文台
34	昆明(中国)	6 51 9 .2 E	+25 1 32 .0	
35	拉巴拉塔(阿根廷)	3 51 43 .72W	−34 54 30 .3	国际緯度站
36	列宁格勒（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	2 1 10 .71E	+59 56 32 .2	列宁格勒大学天文台
37	尔沃夫（烏克蘭苏維埃社会主义共和国）	1 36 3 .40E	+49 50 11 .2	工艺專科学校天文台
38	馬德里(西班牙)	0 14 44 .97W	+40 24 30 .1	馬德里天文气象台
39	六澤(日本)	9 24 31 .46E	+39 8 3 .4	国际緯度站
40	莫斯科(苏联)	2 30 16 .95E	+55 45 19 .8	国家施捷恩别格天文研究所天文台
41	莫斯科(苏联)	2 30 39 .60E	+55 45 39 .7	莫斯科航測大地制圖工程学院天文台
42	南京(中国)	7 55 17 .02E	+32 3 59 .9	
43	尼古拉耶夫（烏克蘭苏維埃社会主义共和国）	2 7 53 .92E	+46 58 18 .5	普尔柯沃天文台分台
44	敖德薩（烏克蘭苏維埃社会主义共和国）	2 3 1 .98E	+46 28 37 .5	敖德薩大学天文台
45	鄂德任耶夫（捷克斯洛伐克）	0 59 8 .08E	+49 54 38 .1	
46	巴黎(法国)	0 9 20 .91E	+48 50 11	巴黎天文台
47	北京(中国)	7 45 52 .87E	+39 54 23 .0	
48	波兹南(波蘭)	1 7 30 .94E	+52 23 47 .7	

續上表

49	波尔塔瓦（烏克蘭苏維埃社会主义共和国）	2^{h}18^{m}11^s.2 E	+49°36′13″.0	重力天文台
50	波茨坦（德国）	0 52 16 .11 E	+52 22 54 .8	测量研究所天文台
51	布拉格（捷克斯洛伐克）	0 57 35 .1 E	+50 4 36 .0	天文研究所天文台
52	普尔柯沃（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	2 1 18 .57 E	+59 46 18 .5	总天文站
53	里加（拉脫維亞苏維埃社会主义共和国）	1 36 27 .69 E	+56 57 8 .2	
54	聖斐南多（西班牙）	0 24 49 .30 W	+36 27 42 .0	
55	西曼寺（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	2 15 59 .38 E	+44 24 11 .6	普尔柯沃天文台分台
56	斯卡尔那捷-普拉索（捷克斯洛伐克）	1 20 58 .57 E	+49 11 20 .0	
57	索非亞（保加利亞）	1 33 23 .3 E	+42 41 1 .7	
58	斯大林納巴德（塔吉克苏維埃社会主义共和国）	4 35 6 .2 E	+38 33 30	
59	塔尔圖（爱沙尼亞苏維埃社会主义共和国）	1 46 53 .18 E	+58 22 47 .2	塔尔圖大学天文台
60	塔什干（烏兹别克苏維埃社会主义共和国）	4 37 10 .47 E	+41 19 30 .4	塔什干天文站
61	东京（日本）	9 18 10 .10 E	+35 40 21 .4	
62	托姆斯克（俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国）	5 39 47 .16 E	+56 28 6 .3	
63	布鲁塞尔（比利时）	0 17 25 .97 E	+50 47 54 .7	
64	哈尔科夫（烏克蘭苏維埃社会主义共和国）	2 24 55 .72 E	+50 0 9 .9	哈尔科夫大学天文台
65	赫尔辛基（芬蘭）	1 39 49 .10 E	+60 9 42 .3	
66	青島（中国）	8 1 16 .81 E	+36 4 11	
67	辛辛那堤（美国）	5 37 41 .40 W	+39 8 19 .8	国际緯度站
68	尤卡依阿（美国）	8 12 50 .3 W	+39 8 12 .0	国际緯度站
69	雅西（罗馬尼亞）	1 50 28 E	+47 11 28	

注：这些天文台坐标摘自“1954年的苏联天文年历”。

附录 III

在卯酉圈上天体的天顶距和方位角的微变表

φ	Δz	ΔA	φ	Δz	ΔA
30°	13′.0	7′.5	50°	9′.6	11′.5
31	12 .9	7 .7	51	9 .4	11 .7
32	12 .7	7 .9	52	9 .2	11 .8
33	12 .6	8 .2	53	9 .0	12 .0
34	12 .4	8 .4	54	8 .8	12 .1
35	12 .3	8 .6	55	8 .6	12 .3
36	12 .1	8 .8	56	8 .4	12 .4
37	12 .0	9 .0	57	8 .2	12 .6
38	11 .8	9 .2	58	7 .9	12 .7
39	11 .7	9 .4	59	7 .7	12 .9
40	11 .5	9 .6	60	7 .5	13 .0
41	11 .3	9 .8	61	7 .3	13 .1
42	11 .2	10 .0	62	7 .0	13 .2
43	11 .0	10 .2	63	6 .8	13 .4
44	10 .8	10 .4	64	6 .6	13 .5
45	10 .6	10 .6	65	6 .3	13 .6
46	10 .4	10 .8	66	6 .1	13 .7
47	10 .2	11 .0	67	5 .9	13 .8
48	10 .0	11 .2	68	5 .6	13 .9
49	9 .8	11 .3	69	5 .4	14 .0
50	9 .6	11 .5	70	5 .1	14 .1